

Tag der Dresdner Aktuare

Lineare Modelle in der Schadenreservierung

Alexander Ludwig Christiane Schmeißer Katrin Thänert

30.10.2009

Christiane Schmeißer

- Consultant, Mercer Deutschland GmbH
LoB: Retirement, Risk and Finance
- Betreuung der betrieblichen Altersvorsorge in Unternehmen
 - versicherungsmathematische Gutachten zur Bewertung von Versorgungsverpflichtungen (nationale/internationale Bilanzierung)
 - betriebswirtschaftliche, arbeits- und steuerrechtliche Fragen
 - Einführung/Änderung von Versorgungsplänen
 - Erstellung/Unterstützung bei der Konsolidierung von internationalen Gutachten
 - Ermittlung von Betriebsrentenansprüchen/Abfindungen

Alexander Ludwig

- Management Consultant, zeb/rolfes.schierenbeck.associates
Competence Team: Methoden und Modelle
- Projekte:
 - Aufbau eines Top-Management-Cockpits für einen deutschen Erstversicherer zum Drilldown handelsrechtlicher, ökonomischer und aufsichtsrechtlicher Kennzahlen
 - Koordination Datenqualitätsmanagement zum Aufbau eines Ratingverfahrens für bilanzierende Kreditnehmer
 - Validierung und Entwicklung von Verhaltensscorecards anhand mathematisch-statistischer Verfahren
 - Entwicklung von Rating-Prototypen in Excel und Access

Inhalt

- 1 Einleitung: Ziel der Schadenreservierung
- 2 Lineare Modelle
- 3 Univariate Modelle der Schadenreservierung
- 4 Multivariate Modelle der Schadenreservierung
- 5 Das Paid/Incurred-Problem
- 6 Praxislösung: Implementierung mittels Excel VBA

Einleitung: Ziel der Schadenreservierung

Schadenrückstellung

- ist eine versicherungstechnische Rückstellung (größter Posten auf Passiv-Seite der Bilanz des Versicherungsunternehmens)
- gebildet für bis zum Bilanzstichtag bereits eingetretene und bis dahin entweder bekannte oder unbekannte, aber noch nicht oder nicht vollständig regulierte Schäden (Versicherungsfälle)
- für jedes Versicherungsportfolio: Aggregation zu Abwicklungsdreieck

Das Abwicklungsdreieck

- Beispiel: bis 2007 geleistete Zahlungen für Schäden aus den Anfalljahren 2002 bis 2007

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	1003	823	597	590	367	183
2003		1149	936	673	622	424
2004			1235	1003	746	634
2005				1487	1198	867
2006					1765	1234
2007						1843

Das Abwicklungsdreieck

- Übergang zu relativen Abwicklungsjahren und relativen Anfalljahren

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1003	823	597	590	367	183
1	1149	936	673	622	424	
2	1235	1003	746	634		
3	1487	1198	867			
4	1765	1234				
5	1843					

- Gesucht: Prädiktoren für unteres Dreieck
- Aufgabe: Stochastische Formulierung dieses Problems

Abwicklungsquadrate von Zufallsvariablen

- Abwicklungsquadrat von Zuwächsen $Z_{i,k}$:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$	...	$Z_{n-k,n-i}$	...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	...	$Z_{n-1,k}$	...	$Z_{n-1,n-i}$	...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	...	$Z_{n,k}$	...	$Z_{n,n-i}$	...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

- Wir nehmen an, dass die Zuwächse für $i+k \leq n$ beobachtbar sind und für $i+k > n$ nicht beobachtbar sind

Abwicklungsquadrate von Zufallsvariablen

- Abwicklungsquadrat von Schadenständen $S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$	...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$	...	$S_{n-k,n-i}$	...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	...	$S_{n-1,k}$	...	$S_{n-1,n-i}$	...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	...	$S_{n,k}$	...	$S_{n,n-i}$	...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

- $S_{i,n-i}$ aktueller Schadenstand für das Anfalljahr i
- $S_{i,n}$ Endschatenstand für das Anfalljahr i

Reserven

- Anfalljahrreserve:

$$R_i := \sum_{l=n-i+1}^n Z_{i,l}$$

mit $i \in \{1, \dots, n\}$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1003	823	597	590	367	183
1	1149	936	673	622	424	
2	1235	1003	746	634		
3	1487	1198	867			
4	1765	1234				
5	1843					

R₃

Reserven

- Kalenderjahrreserve:

$$R_{(c)} := \sum_{i=c-n}^n Z_{i,c-i}$$

mit $c \in \{n+1, \dots, 2n\}$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1003	823	597	590	367	183
1	1149	936	673	622	424	
2	1235	1003	746	634		
3	1487	1198	867			
4	1765	1234				
5	1843					

R(7)

Reserven

- Gesamtreserve:

$$R := \sum_{j=1}^n \sum_{l=n-j+1}^n Z_{j,l} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=n-l+1}^n Z_{j,l}.$$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1003	823	597	590	367	183
1	1149	936	673	622	424	
2	1235	1003	746	634		
3	1487	1198	867		R	
4	1765	1234				
5	1843					

Anforderungen an die Modellierung

- Bestimmung von Schätzern und Prognosen mit erwünschten ("schönen") Eigenschaften ermöglichen
- Ermittlung der (Un)Genauigkeit von Prognosen in Form von Prognosefehlern durchführbar machen
- Einbeziehen verfügbarer Information (Muster in der Schadenabwicklung, Zusammenhänge zwischen lines of business, Expertenmeinungen, Gesamtmarktzahlen)

Lineare Modelle

- Das Lineare Modell mit beobachtbaren und nicht-beobachtbaren Zufallsvariablen
- Das Lineare Modell mit beobachtbaren und nicht-beobachtbaren Zufallsvariablen unter einer linearen Nebenbedingung
- Das bedingte Lineare Modell

Das Lineare Modell

Das Lineare Modell

- (i) Es gibt einen Parametervektor $\beta \in \mathbb{R}^s$ und Matrizen $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times s}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times s}$ mit $\text{rang}(\mathbf{A}_1) = s$ und

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta.$$

- (ii) Σ_{11} ist invertierbar.

- Designmatrix $\mathbf{A}$ bekannt, Parametervektor β unbekannt
- $\mathbf{X}_1 \in L^2(\mathbb{R}^{m_1})$ beobachtbar, $\mathbf{X}_2 \in L^2(\mathbb{R}^{m_2})$ nicht beobachtbar
- $\text{var} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \text{var}[\mathbf{X}_1] & \text{cov}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \\ \text{cov}[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] & \text{var}[\mathbf{X}_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$
- ★ M.D. Hamer [1999]: *Loss prediction by generalized least squares – Discussion of Halliwell (1996)*

Prognosegröße im Linearen Modell

- Zusammenfassen in einem Zufallsvektor $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$$

mit $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{d \times s}$, $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{d \times m_1}$, $\mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{d \times m_2}$

- Motivation aus der Schadenreservierung:

$$\begin{aligned} S_{i,k} &= \sum_{l=0}^{n-i} Z_{i,l} + \sum_{l=n-i+1}^k Z_{i,l} \\ &= \sum_{l=0}^{n-i} \mathbf{e}'_{1;i,l} \mathbf{X}_1 + \sum_{l=n-i+1}^k \mathbf{e}'_{2;i,l} \mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{e}_{1;i,k}$ m_1 -dimensional, 1 an $(\frac{(2n+3-k)k}{2} + i + 1)$ -ter Stelle
- $\mathbf{e}_{2;i,k}$ m_2 -dimensional, 1 an $(\frac{k(k+1)}{2} + i - n)$ -ter Stelle

Prädiktor

- Ein Zufallsvektor $\hat{\mathbf{T}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ heißt *zulässiger Prädiktor* für $\mathbf{T}$, wenn er linear ist, d.h. es existiert eine Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times m_1}$ mit
$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1,$$

und

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 = \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2$$

gilt.

- Jeder zulässige Prädiktor ist erwartungstreu.
- Erwarteter quadratischer Prognosefehler* eines erwartungstreuen Prädiktors für $\mathbf{T}$ ist

$$E[(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})'(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})] = \text{trace}(\text{var}[\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}]).$$

- Ein zulässiger Prädiktor $\hat{\mathbf{T}}$, der den erwarteten quadratischen Prognosefehler unter allen zulässigen Prädiktoren für $\mathbf{T}$ minimiert, wird als *Gauss–Markov Prädiktor* bezeichnet.

Gauss–Markov Theorem

Gauss–Markov Theorem

- (i) *Es existiert ein eindeutig bestimmter Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{T}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$ und es gilt*

$$\mathbf{T}^{\text{GM}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2^*$$

mit

$$\boldsymbol{\beta}^* := (\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{X}_1$$

und

$$\mathbf{X}_2^* := \mathbf{A}_2\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta}^*).$$

- (ii) *Für die Varianz des Prognosefehlers gilt*

$$\text{var}[\mathbf{T}^{\text{GM}} - \mathbf{T}]$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)\text{var}[\boldsymbol{\beta}^*](\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)' \\ &\quad + \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12})\mathbf{D}_2' \end{aligned}$$

mit

$$\text{var}[\boldsymbol{\beta}^*] = (\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)^{-1}.$$

Das Lineare Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Das Lineare Modell unter einer linearen Nebenbedingung

- (i) Es gibt einen Parametervektor $\beta \in \mathbb{R}^s$ und Matrizen $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times s}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times s}$ mit $\text{rang}(\mathbf{A}_1) = s$ und

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta.$$

- (ii) Σ_{11} ist invertierbar.
(iii) Es existiert eine Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ mit $\text{rang}(\mathbf{H}) = r$ und ein Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^r$ und

$$\mathbf{H}\beta = \mathbf{h}.$$

- ★ K. Klobardanz, K.D. Schmidt [2008]: *Prediction in the linear model under a linear constraint*

Prädiktor

- Ein Zufallsvektor $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H},\mathbf{h}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ heißt $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -zulässiger *Prädiktor* für $\mathbf{T}$, wenn er $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -linear ist, d.h. es existieren Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times m_1}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{d \times r}$ mit

$$\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H},\mathbf{h}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1 + \mathbf{R}\mathbf{h},$$

und

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{H} = \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2$$

gilt.

- Jeder $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -zulässige Prädiktor ist erwartungstreu.
- Ein $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -zulässiger Prädiktor $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H},\mathbf{h}}$, der den erwarteten quadratischen Prognosefehler unter allen $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -zulässigen Prädiktoren für $\mathbf{T}$ minimiert, wird als $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -Gauss-Markov *Prädiktor* bezeichnet.

Gauss–Markov Theorem unter linearer Nebenbedingung

Gauss–Markov Theorem unter einer linearen Nebenbedingung

- (i) Es existiert ein eindeutig bestimmter $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$ und es gilt

$$\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_{2; \mathbf{H}, \mathbf{h}}^*$$

mit

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* := \boldsymbol{\beta}^* - (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}' (\mathbf{H} (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}')^{-1} (\mathbf{H} \boldsymbol{\beta}^* - \mathbf{h}),$$

$$\boldsymbol{\beta}^* := (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1,$$

$$\mathbf{X}_{2; \mathbf{H}, \mathbf{h}}^* := \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* + \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*).$$

- (ii) Für die Varianz des Prognosefehlers gilt

$$\begin{aligned} \text{var}[\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}} - \mathbf{T}] \\ = (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1) \text{var}[\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*] (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)' \\ + \mathbf{D}_2 (\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{D}_2' \end{aligned}$$

mit

$$\text{var}[\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*] = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}' (\mathbf{H} (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}')^{-1} \mathbf{H} \right) \text{var}[\boldsymbol{\beta}^*].$$

Das bedingte Lineare Modell

Einige wichtige Modelle der Schadenreservierung sind nur in einem bedingten Modell darstellbar:

- Betrachten einer Unter- σ -Algebra $\mathcal{G}$ des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei $\mathcal{G}$ die Informationen der beobachtbaren Zufallsvariablen repräsentiert
- Ersetzen der ersten und zweiten Momente durch $\mathcal{G}$ -bedingte Momente
- Ersetzen der Matrizen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ durch $\mathcal{G}$ -messbare Zufallsmatrizen und des Vektors $\mathbf{h}$ durch einen $\mathcal{G}$ -messbaren Zufallsvektor
- Ersetzen des Parametervektors β durch einen $\mathcal{G}$ -messbaren Zufallsvektor

Damit können die Gauss–Markov Theoreme des Linearen Modells auf den bedingten Fall erweitert werden.

Univariate Modelle der Schadenreservierung

- Das univariate additive Modell
- Das univariate Panning Modell
- Drei Modelle für das univariate Chain–Ladder Verfahren

Das univariate additive Modell

Das univariate additive Modell: *Es existieren reelle Zahlen $v_0, v_1, \dots, v_n \in (0, \infty)$ und $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 \in (0, \infty)$ sowie $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}$, so dass*

$$E[Z_{i,k}] = v_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] = v_i \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt.

- Kronecker-Symbol $\delta_{i,j}$ entspricht 1, falls $i = j$, und 0 sonst
- ★ Mack [1997]: *Schadenversicherungsmathematik*
- ★ Radtke and Schmidt (Hrsg.) [2004]: *Handbuch zur Schadenreservierung*

Parameterschätzung

Theorem

Für den Gauss–Markov Schätzer ζ_k^{GM} für ζ_k gilt

$$\zeta_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j}$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und für die Kovarianz gilt

$$\text{COV} [\zeta_k^{\text{GM}}, \zeta_l^{\text{GM}}] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=0}^{n-k} v_i} \delta_{k,l},$$

mit $k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt für den erwarteten quadratischen Schätzfehler

$$E[(\zeta_k^{\text{GM}} - \zeta_k)^2] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=0}^{n-k} v_i}.$$

Prädiktor für die Schadenzuwächse

Theorem

Für den Gauss–Markov Prädiktor $Z_{i,k}^{\text{GM}}$ für den Zuwachs $Z_{i,k}$ mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$ und $i + k > n$ gilt

$$Z_{i,k}^{\text{GM}} = v_i \zeta_k^{\text{GM}}$$

und für die Kovarianz der Prognosefehler gilt

$$\text{cov} [Z_{i,k}^{\text{GM}} - Z_{i,k}, Z_{j,l}^{\text{GM}} - Z_{j,l}] = v_i v_j \sigma_k^2 \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} v_h} + \frac{1}{v_j} \delta_{i,j} \right) \delta_{k,l}.$$

Insbesondere gilt für den erwarteten quadratischen Prognosefehler

$$E[(Z_{i,k}^{\text{GM}} - Z_{i,k})^2] = v_i^2 \sigma_k^2 \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} v_h} + \frac{1}{v_i} \right).$$

Das univariate additive Modell

Bemerkungen:

- Die Gauss–Markov–Prädiktoren der Zuwächse im additiven Modell stimmen mit den Prädiktoren des additiven Verfahrens überein.
- Die Reserven sind Summen nicht–beobachtbarer Zuwächse und die Gauss–Markov Prognose ist linear. Daher ist der Gauss–Markov Prädiktor einer Reserve gleich der Summe der Gauss–Markov Prädiktoren der einzelnen nicht–beobachtbaren Zuwächse.

Prädiktor für die Reserven

Theorem

- Gauss–Markov Prädiktor R_i^{GM} für die Anfalljahrreserve R_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$R_i^{\text{GM}} = \sum_{l=n-i+1}^n v_l \zeta_l^{\text{GM}}$$

- Gauss–Markov Prädiktor $R_{(c)}^{\text{GM}}$ für die Kalenderjahrreserve $R_{(c)}$ mit $c \in \{n+1, \dots, 2n\}$:

$$R_{(c)}^{\text{GM}} = \sum_{i=c-n}^n v_i \zeta_{c-i}^{\text{GM}}$$

- Gauss–Markov Prädiktor R^{GM} für die Gesamtreserve R :

$$R^{\text{GM}} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=n-l+1}^n v_j \zeta_l^{\text{GM}}.$$

Schätzen der Varianzparameter

Theorem

Im univariaten additiven Modell ist

$$\widehat{(\sigma_k^2)} := \frac{1}{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} v_j \left(\frac{Z_{j,k}}{v_j} - \zeta_k^{\text{GM}} \right)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ_k^2 mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Konstruktion eines Schätzers von σ_n^2 :

- Betrachten des Linearen Modells $E[\log(\widehat{\sigma_k^2})] = \alpha_0 + k\alpha_1$,
 $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, und bestimmen von Schätzern $\widehat{\alpha}_0$ und $\widehat{\alpha}_1$ für α_0 und α_1 mittels der Methode der kleinsten Quadrate.
- Wir definieren

$$\widehat{\sigma_n^2} := \exp(\widehat{\alpha}_0 + n\widehat{\alpha}_1)$$

Modellannahmen des univariaten Panning-Modells

- Das Panning-Modell ist ein bedingtes Modell mit $\mathcal{F}_0 := \sigma(Z_{i,0} : i \in \{0, 1, \dots, n\})$.

Das univariate Panning-Modell: Es existieren $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariablen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sowie $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariablen $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ mit Werten in $(0, \infty)$, so dass

$$E^{\mathcal{F}_0}[Z_{i,k}] = Z_{i,0}\beta_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_0}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] = \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt.

- ★ Panning [2006]: *Measuring loss reserve uncertainty*

Vergleich Panning–Modell mit additivem Modell

- anstelle externer Volumenmaße (Prämieneinnahmen) für Anfalljahre hier Verwendung von Zuwächsen des ersten Abwicklungsjahres als Volumenmaße
- daher Formulierung als bedingtes Modell notwendig
- Varianzannahme vereinfacht (keine Abhängigkeit vom Anfalljahr)
- aber: multiplikative Struktur für (bedingtes) erstes Moment analog zu additivem Modell
- verschiedene Zuwächse (bedingt) unkorreliert wie im additiven Modell
- Folge: Rechnungen weitestgehend analog zu additivem Modell

Parameterschätzung

Theorem

Für den $\mathcal{F}_0$ -bedingten Gauss–Markov Schätzer β_k^{GM} für β_k gilt

$$\beta_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,0} Z_{j,k}}{\sum_{h=0}^{n-k} Z_{h,0}^2}$$

für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und für die Kovarianz gilt

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_0} [\beta_k^{\text{GM}}, \beta_l^{\text{GM}}] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{h=0}^{n-k} Z_{h,0}^2} \delta_{k,l},$$

mit $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Insbesondere gilt für den erwarteten quadratischen Schätzfehler

$$E[(\beta_k^{\text{GM}} - \beta_k)^2] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{h=0}^{n-k} Z_{h,0}^2}.$$

Das univariate Chain-Ladder Verfahren

Das univariate Chain-Ladder Verfahren

Beim univariaten Chain-Ladder Verfahren wird für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ der univariate Chain-Ladder Faktor

$$\varphi_k^{\text{CL}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}}$$

und für alle $i, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $i + k \geq n$ der univariate Chain-Ladder Prädiktor

$$S_{i,k}^{\text{CL}} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l^{\text{CL}}$$

für den Schadenstand $S_{i,k}$ gebildet.

Das univariate Chain-Ladder Verfahren

Anfalljahr	Abwicklungsjahr					
	0	...	k-1	k	...	n
0	$S_{0,0}$	...	$S_{0,k-1}$	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n-k	$S_{n-k,0}$	...	$S_{n-k,k-1}$	$S_{n-k,k}$		
n-k+1	$S_{n-k+1,0}$	...	$S_{n-k+1,k-1}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
n	$S_{n,0}$					

Das univariate Modell von Mack

Das univariate Modell von Mack

- (i) Es existieren Abwicklungsfaktoren $\varphi_1, \dots, \varphi_n > 0$ mit

$$E^{\mathcal{H}_{i,k-1}}[S_{i,k}] = S_{i,k-1}\varphi_k$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$.

- (ii) Die Schadenstände verschiedener Anfalljahre sind unabhängig.

- (iii) Es existieren Parameter $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 > 0$ mit

$$\text{var}^{\mathcal{H}_{i,k-1}}[S_{i,k}] = S_{i,k-1}\sigma_k^2$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\mathcal{H}_{i,k} := \sigma(\{S_{i,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k\}}) \text{ mit } i \in \{0, 1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}$$

Das univariate Modell von Schnaus

Das univariate Modell von Schnaus

- (i) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine $\mathcal{H}_{k-1}$ -messbare Zufallsvariable φ_k , so dass

$$E^{\mathcal{H}_{k-1}}[S_{i,k}] = S_{i,k-1}\varphi_k$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- (ii) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine $\mathcal{H}_{k-1}$ -messbare Zufallsvariable σ_k^2 mit $P[\sigma_k^2 > 0] = 1$, so dass

$$\text{cov}^{\mathcal{H}_{k-1}}[S_{i,k}, S_{j,k}] = S_{i,k-1}\sigma_k^2\delta_{ij}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt.

$$\mathcal{H}_k := \sigma(\{S_{i,l}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}, l \in \{0,1,\dots,k\}}) \supseteq \mathcal{H}_{i,k} \text{ mit } i \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ k \in \{1, \dots, n\}$$

Die univariaten Modelle von Mack und Schnaus

- Mack ist ein Spezialfall von Schnaus
- ★ T. Mack [1993]: *Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates*
- ★ T. Mack [1997]: *Schadenversicherungsmathematik*
- ★ K.D. Schmidt und A. Schnaus [1996]: *An extension of Mack's model for the chain-ladder method*
- Prognose ist für das erste nicht beobachtbare Kalenderjahr $n + 1$ optimal
- für die nicht beobachtbaren Kalenderjahre $n + 2, \dots, 2n$ ist die Prognose nicht notwendigerweise optimal
- ★ K.D. Schmidt [1997]: *Non-optimal prediction by the chain-ladder method*
- ★ K.D. Schmidt [1999]: *Chain-ladder prediction and asset liability management*

Die univariaten Modelle von Mack und Schnaus

- Wegen des sequentiellen Charakters dieser Modelle ist die exakte Berechnung des Prognosefehlers der Reserven nicht möglich. Daher wird der Prognosefehler mittels einer Approximation geschätzt.
- ★ Mack [1993]: *Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates.*
- ★ Mack [1997]: *Schadenversicherungsmathematik.*

Das univariate strikte Chain-Ladder Modell

Das univariate strikte Chain-Ladder Modell

- (i) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine $\mathcal{G}_{k-1}$ -messbare Zufallsvariable φ_k so dass

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}}[S_{i,k}] = \begin{cases} S_{i,k-1}\varphi_k & i \leq n-k \\ S_{i,k-1}^{\text{CL}}\varphi_k & i > n-k \end{cases}$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt.

- (ii) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert eine $\mathcal{G}_{k-1}$ -messbare Zufallsvariable σ_k^2 mit $P[\sigma_k^2 > 0] = 1$ so dass

$$\text{cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}[S_{i,k}, S_{j,k}] = \begin{cases} S_{i,k-1}\sigma_k^2\delta_{i,j} & i \leq n-k \\ S_{i,k-1}^{\text{CL}}\sigma_k^2\delta_{i,j} & i > n-k \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt.

$\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{G}_k := \sigma(\{S_{i,l}\}_{i \in \{0,1,\dots,n-l\}, l \in \{0,1,\dots,k\}}) \subseteq \mathcal{H}_k$ mit
 $k \in \{1, \dots, n\}$

Das univariate strikte Chain-Ladder Modell

Theorem

Der $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingte Gauss-Markov Schätzer φ_k^{GM} von φ_k erfüllt

$$\varphi_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und für die $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingte Varianz

$$\text{var}^{\mathcal{G}_{k-1}}[\varphi_k^{\text{GM}}] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}.$$

Für den $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingten Gauss-Markov Schätzer φ_k^{GM} gilt für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\varphi_k^{\text{GM}} = \varphi_k^{\text{CL}}.$$

Das univariate strikte Chain-Ladder Modell

Theorem

Für ein festes $k \in \{1, \dots, n\}$ und $i, j \in \{n - k + 1, \dots, n\}$ gilt für den $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingten Gauss-Markov Prädiktor $S_{i,k}^{\text{GM}}$ von $S_{i,k}$

$$S_{i,k}^{\text{GM}} = S_{i,k-1}^{\text{CL}} \varphi_k^{\text{GM}}$$

und für die $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingte Kovarianz des Prognosefehlers

$$\begin{aligned} \text{cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}[S_{i,k}^{\text{GM}} - S_{i,k}, S_{j,k}^{\text{GM}} - S_{j,k}] \\ = S_{i,k-1}^{\text{CL}} S_{j,k-1}^{\text{CL}} \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} + \frac{1}{S_{i,k-1}^{\text{CL}}} \delta_{i,j} \right) \sigma_k^2. \end{aligned}$$

Der $\mathcal{G}_{k-1}$ -bedingte Gauss-Markov Prädiktor $S_{i,k}^{\text{GM}}$ erfüllt

$$S_{i,k}^{\text{GM}} = S_{i,k}^{\text{CL}}.$$

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Schadenreservierung

- $M \in \mathbb{N}$ Portfeuille, die als Teilportfeuille eines Gesamtportfeuille betrachtet werden können
- Integration von Korrelationen zwischen Teilportfeuille auf Abwicklungsjahrebene
- Nutzen: Lösen des Problem Aggregation von Portfeuille sowie Grundlage für Lösungsansätze des Paid/Incurred - Problems
- Definitionen:

$$\mathbf{Z}_{i,k} := \left(Z_{i,k}^{(p)} \right)_{p \in \{1, \dots, M\}}$$
$$\mathbf{V}_i := \text{diag}(v_i)$$

Das multivariate additive Modell

Das multivariate additive Modell

Es existieren positiv definite symmetrische Matrizen

$\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n \in \mathbb{R}^{M \times M}$ und $\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}_1, \dots, \mathbf{\Sigma}_n \in \mathbb{R}^{M \times M}$ und Vektoren $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}^M$, so dass

$$E[\mathbf{Z}_{i,k}] = \mathbf{V}_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[\mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{j,l}] = \mathbf{V}_i^{1/2} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_j^{1/2} \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- Lineares Modell
- $\mathbf{V}_i$ symmetrisch, positiv definit $\Rightarrow \mathbf{V}_i^{1/2}$ existiert
- ★ M. Radtke und K.D. Schmidt [2004]: *Handbuch zur Schadenreservierung*

Das multivariate additive Modell

Schätzer und Prädiktoren im multivariaten Additiven Modell

- $\zeta_k^{\text{GM}} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} (\mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2}) \mathbf{v}_j^{-1} \mathbf{z}_{j,k}$
- $\text{cov}[\zeta_k^{\text{GM}}, \zeta_l^{\text{GM}}] = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right)^{-1} \delta_{k,l} =: \mathbf{M}_{\zeta_k^{\text{GM}}} \delta_{k,l}$
- $\mathbf{z}_{i,k}^{\text{GM}} = \mathbf{v}_i \zeta_k^{\text{GM}}$
- $\text{cov}[\mathbf{z}_{i,k}^{\text{GM}} - \mathbf{z}_{i,k}, \mathbf{z}_{j,l}^{\text{GM}} - \mathbf{z}_{j,l}] = \mathbf{v}_i \left(\mathbf{M}_{\zeta_k^{\text{GM}}} + (\mathbf{v}_i^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_i^{1/2})^{-1} \delta_{i,j} \right) \mathbf{v}_j \delta_{k,l}$

Das Paid/Incurred-Problem

Das Paid/Incurred-Problem

Das Paid/Incurred–Problem

Für ein Risikoportfolio seien zwei Datenarten gegeben:

- Schadenzahlungen (Paid Losses): $\{Z_{i,k}^{(p)}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$
- Schadenaufwendungen (Incurred Losses): $\{Z_{i,k}^{(q)}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$

Paid/Incurred–Problem: z.T. stark voneinander abweichende Prognosen für die Endschadenstände der Schadenzahlungen und –aufwendungen bei getrennter Prognose

Ziel: Verminderung der Abweichung zwischen den Prädiktoren der Schadenzahlungen und –aufwendungen

- ★ Halliwell [1997]: *Conjoint prediction of paid and incurred losses*
- ★ Kloberdanz und Schmidt [2008]: *Loss Reserving in a Linear Model Under a Linear Constraint*

Das bivariate additive Modell unter Nebenbedingung

- Basierend auf den Annahmen des multivariaten additiven Modells nehmen wir an, dass $M = 2$ und Volumenmaße identisch für beide Abwicklungsdreiecke
- Nebenbedingung:

$$E \left[S_{i,n}^{(p)} \right] = E \left[S_{i,n}^{(q)} \right]$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Da

$$E \left[S_{i,n}^{(r)} \right] = v_i \left(\sum_{l=0}^n \zeta_l^{(r)} \right)$$

für $r \in \{p, q\}$, kann die Nebenbedingung geschrieben werden als

$$\sum_{l=0}^n \zeta_l^{(p)} = \sum_{l=0}^n \zeta_l^{(q)}.$$

Das bivariate additive Modell unter Nebenbedingung

- Damit lässt sich die Nebenbedingung formulieren als

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h}$$

mit

$$\mathbf{H} := \left(\mathbf{s}' \mid \cdots \mid \mathbf{s}' \right) \in \mathbb{R}^{1 \times 2(n+1)}$$

wobei

$$\mathbf{s} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{\beta} := (\zeta'_0, \zeta'_1, \dots, \zeta'_n)' \in \mathbb{R}^{2(n+1)}, \quad \zeta_k := \left(\zeta_k^{(p)}, \zeta_k^{(q)} \right)'$$

$$\mathbf{h} := 0$$

Das bivariate additive Modell unter Nebenbedingung

- Definiere zunächst

$$\gamma_k := \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{s}' \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{s}$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- Schätzung der ζ_k mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ unter der linearen Nebenbedingung $\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h}$

Theorem

Für den $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -Gauss-Markov Schätzer $\zeta_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}$ für ζ_k gilt

$$\zeta_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}} = \zeta_k^{\text{GM}} - \frac{\sum_{c=0}^n \mathbf{s}' \zeta_c^{\text{GM}}}{\sum_{c=0}^n \gamma_c} \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{s}$$

für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Das bivariate additive Modell unter Nebenbedingung

Für die Kovarianz von $\zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};k}^{\text{GM}}$ und $\zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};l}^{\text{GM}}$ mit $k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{cov}[\zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};k}^{\text{GM}}, \zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};l}^{\text{GM}}] \\ = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k \delta_{k,l} - \frac{1}{\sum_{c=0}^n \gamma_c} \left(\frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{s} \right) \left(\frac{1}{\sum_{j=0}^{n-l} v_j} \mathbf{\Sigma}_l \mathbf{s} \right)'. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} E \left[\left(\zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};k}^{\text{GM}} - \zeta_k \right)' \left(\zeta_{\mathbf{H},\mathbf{h};k}^{\text{GM}} - \zeta_k \right) \right] \\ = \text{trace} \left(\frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k - \frac{1}{\sum_{c=0}^n \gamma_c} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{n-k} v_j \right)^2} \mathbf{s}' \mathbf{\Sigma}_k^2 \mathbf{s} \right). \end{aligned}$$

Das bivariate additive Modell unter Nebenbedingung

- Prädiktor für die Zuwächse $\mathbf{Z}_{i,k} := \left(Z_{i,k}^{(p)}, Z_{i,k}^{(q)} \right)'$ mit $i + k \geq n + 1$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h}$:

Theorem

Für den $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ -Gauss-Markov Prädiktor $\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{Z}_{i,k}$ mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$ und $i + k \geq n + 1$ gilt

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} = v_i \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}$$

und für die Kovarianz der Prognosefehler gilt

$$\text{cov} \left[\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; j, l}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{j,l} \right] = v_i v_j \text{cov} [\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}, \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; l}^{\text{GM}}] + v_i \boldsymbol{\Sigma}_k \delta_{i,j} \delta_{k,l}.$$

für alle $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt

$$E[(\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{i,k})'(\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{i,k})] = \text{trace} (v_i^2 \text{var}[\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}] + v_i \boldsymbol{\Sigma}_k).$$

Praxislösung: Implementierung mittels Excel VBA

- Univariate Modelle
- Multivariate Modelle
- Paid/Incurred-Problem

Präsentation der entwickelten Excel-Sheets

- additives Modell, Panning-Modell sowie Chain-Ladder Modell wurden uni- sowie multivariat mittels Excel VBA implementiert
- bivariates additives sowie bivariates Panning-Modell mit Nebenbedingung zur Behandlung des Paid/Incurred-Problems wurden ebenso implementiert
- stets freie Wahl der Abwicklungsjahre n und Portfeuilleanzahl M
- automatische Generierung der Sheets
- Möglichkeit der Einarbeitung von Vor- bzw. Expertenkenntnissen (v.a. bei Varianzstruktur)

Analyse von Daten der Hannover Rück

Univariate Loss Reserving Models

Model	Total Reserve	Standard Error	1st Calendar Year Reserve	Standard Error
Portfolio 1: General liability non-prop				
Additive Model	1051	233	296	106
Panning Model	421	141	138	78
Chain-Ladder Model	510	192	169	-
Portfolio 2: Motor non-prop				
Additive Model	227	62	85	14
Panning Model	132	42	56	13
Chain-Ladder Model	151	50	62	-
Portfolio 3: Property non-prop				
Additive Model	59	45	60	37
Panning Model	72	43	57	26
Chain-Ladder Model	60	52	65	-
Portfolio 4: Aviation				
Additive Model	133	73	58	46
Panning Model	114	70	58	54
Chain-Ladder Model	115	66	59	-

Analyse von Daten der Hannover Rück

Multivariate Loss Reserving Models

Model	Total Reserve	Standard Error	1st Calendar Year Reserve	Standard Error
Additive Model	1034	229	297	105
	230	61	87	14
	59	45	61	37
	140	71	62	46
Panning Model	425	136	139	77
	138	41	57	13
	68	42	55	26
	100	69	50	53
Chain-Ladder Model	487	193	164	
	153	27	63	
	55	42	62	-
	108	66	54	

Analyse von Daten eines zweiten Rückversicherers

Ultimate–Paid/Incurred–Ratios in the Panning Model

