Das Bornhuetter–Ferguson Prinzip

—

Über Gemeinsamkeiten bekannter Reservierungsverfahren

Klaus D. Schmidt

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik
TU Dresden

Mathias Zocher

Aktuariat Nichtleben
Allianz Suisse

Dresden, 30. Oktober 2009

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip
- Beispiele aus der Praxis

Abwicklungsdreieck für Schadenstände (1)

Schaden–jahr	**Abwicklungsjahr** 2000	2001	2002	2003	2004	2005
2000	1001	1855	2423	2988	3335	3483
2001		1113	2103	2774	3422	3844
2002			1265	2433	3233	3977
2003				1490	2873	3880
2004					1725	4261
2005						1889

Abwicklungsdreieck für Schadenstände (2)

Schaden–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	2	3	4	5
2000	1001	1855	2423	2988	3335	3483
2001	1113	2103	2774	3422	3844	
2002	1265	2433	3233	3977		
2003	1490	2873	3880			
2004	1725	4261				
2005	1889					

Abwicklungsdreieck für Schadenstände (3)

Schaden–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					

Abwicklungsquadrat für Schadenstände

Schaden–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	…	k	…	$n-i$	…	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	…	$S_{0,k}$	…	$S_{0,n-i}$	…	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	…	$S_{1,k}$	…	$S_{1,n-i}$	…	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	…	$S_{i,k}$	…	$S_{i,n-i}$	…	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	…	$S_{n-k,k}$	…	$S_{n-k,n-i}$	…	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	…	$S_{n-1,k}$	…	$S_{n-1,n-i}$	…	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	…	$S_{n,k}$	…	$S_{n,n-i}$	…	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Ein Schadenstand $S_{i,k}$ heißt

- beobachtbar falls $i+k \leq n$.
- nicht beobachtbar oder zukünftig falls $i+k > n$.
- aktueller Schadenstand falls $i+k = n$.
- Endschadenstand falls $k = n$.

Prognose

Aufgabe der Schadenreservierung ist die Prognose

- aller Endschadenstände $S_{i,n}$
- aller Schadenjahrreserven $S_{i,n} - S_{i,n-i}$
- der Gesamtreserve $\sum_{i=0}^{n}(S_{i,n} - S_{i,n-i})$

erweiterter Aufgabenbeich: Prognose

- aller zukünftigen Schadenstände $S_{i,k}$
- aller zukünftigen Zuwächse $Z_{i,k} := S_{i,k} - S_{i,k-1}$
- aller Kalenderjahrreserven $\sum_{j=p-n}^{n} Z_{j,p-j}$

mit $i + k > n$ und $p = n+1, \ldots, 2n$.

Die zentrale Aufgabe besteht daher in der Prognose der zukünftigen Schadenstände (alternativ der zukünftigen Zuwächse).

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
  - Das Chain-Ladder Verfahren
  - Das Bornhuetter-Ferguson Verfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip
- Beispiele aus der Praxis

Chain–Ladder Faktoren

Aus den beobachtbaren Schadenständen werden die Chain–Ladder Faktoren

$$\widehat{\varphi}_k^{CL} \quad := \quad \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

geschätzt.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					
$\widehat{\varphi}_k^{CL}$		2,051	1,329	1,232	1,120	1,044

Chain–Ladder Verfahren

Für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $k = n - i, \ldots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} \quad := \quad S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \widehat{\varphi}_l^{\text{CL}}$$

als Chain–Ladder Prädiktoren bezeichnet.

Beim Chain–Ladder Verfahren werden die aktuellen
Schadenstände mit Hilfe
der Chain–Ladder Faktoren $\widehat{\varphi}_l^{\text{CL}}$ schrittweise
auf das Niveau des Abwicklungsjahres k skaliert.

Das Bornhutter-Ferguson Verfahren

In der ursprünglichen Form zielt das Bornhuetter-Ferguson Verfahren auf die Prognose der Schadenjahrreserven

$$R_i \quad := \quad S_{i,n} - S_{i,n-i}$$

Die Borhuetter-Ferguson Prädiktoren der Schadenjahrreserven R_i sind definiert als

$$\widehat{R}_i \quad := \quad \left(1 - \widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}\right) \pi_i \widehat{\kappa}_i$$

mit

- $\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}$ die aus den Chain-Ladder Faktoren berechnete Quote
- π_i ein Volumenmass und
- $\widehat{\kappa}_i$ ein Schätzer für die erw. Schadenquote $\kappa_i := \text{E}[S_{i,n}/\pi_i]$

Vergleich mit dem Chain-Ladder Verfahren

Der Prädiktor für den Endschadenstand lässt sich in der Form

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}} = S_{i,n-i} + \left(1 - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{CL}}\right) \pi_i \widehat{\kappa}_i$$

schreiben.
Im Gegensatz zum Chain-Ladder Verfahren

- werden Abwicklungsquoten statt Faktoren verwendet,
- wird der aktuelle Schadenstand $S_{i,n-i}$ nicht explizit zur Berechnung der Reserven benötigt und
- wird mit dem Volumenmass π_i und der Schadenquote $\widehat{\kappa}_i$ Information ausserhalb des Schadendreiecks verwendet.

Übersicht

Abwicklungsmuster (1)

- Ein Abwicklungsmuster für Quoten besteht aus Parametern $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ mit

$$\gamma_k = \mathrm{E}[S_{i,k}]/\mathrm{E}[S_{i,n}]$$

für alle $k = 0, 1, \ldots, n$ und alle $i = 0, 1, \ldots, n$.
Die Parameter werden als Abwicklungsquoten bezeichnet.

- Ein Abwicklungsmuster für Anteile besteht aus Parametern $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ mit

$$\vartheta_k = \mathrm{E}[Z_{i,k}]/\mathrm{E}[S_{i,n}]$$

für alle $k = 0, 1, \ldots, n$ und alle $i = 0, 1, \ldots, n$.
Die Parameter werden als Abwicklungsanteile bezeichnet.

Abwicklungsmuster (2)

- Ein Abwicklungsmuster für Faktoren besteht aus Parametern $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit

$$\varphi_k \quad = \quad \mathrm{E}[S_{i,k}]/\mathrm{E}[S_{i,k-1}]$$

  für alle $k = 1, \dots, n$ und alle $i = 0, 1, \dots, n$.
  Die Parameter werden als Abwicklungsfaktoren bezeichnet.

- Ein Abwicklungsmuster für Raten besteht aus Parametern $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ mit

$$\beta_k \quad = \quad \mathrm{E}[Z_{i,k}]/\mathrm{E}[Z_{i,0}]$$

  für alle $k = 0, 1, \dots, n$ und alle $i = 0, 1, \dots, n$.
  Die Parameter werden als Abwicklungsraten bezeichnet.

Abwicklungsmuster (3)

- Ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse besteht aus Parametern $\zeta_0(\boldsymbol{\pi}), \zeta_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, \zeta_n(\boldsymbol{\pi})$ mit

$$\zeta_k(\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{E}\left[Z_{i,k}/\pi_i\right]$$

für alle $k = 0, 1, \ldots, n$ und alle $i = 0, 1, \ldots, n$.
Dabei ist $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ ein Vektor von Volumenmassen (zum Beispiel Prämien oder Anzahl Verträge), der vorgegeben ist.

Äquivalenz

Folgende Abwicklungsmuster sind äquivalent, d.h. sie können ineinander überführt werden:

- Abwicklungsmuster für Quoten
- Abwicklungsmuster für Anteile
- Abwicklungsmuster für Faktoren
- Abwicklungsmuster für Raten

Liegt ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse vor, dann sind auch die Voraussetzung aller oben genannten Abwicklungsmuster erfüllt.
Für die umgekehrte Implikation ist die zusätzlich Annahme einer schadenjahrunabhängigen Schadenquote bezüglich des betrachteten Volumenmasses notwendig.

Schätzung der Quoten

Schaden–jahr	**Abwicklungsjahr** 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4044
2	1265	2433	3233	3977	4477	4777
3	1490	2873	3880	4780	5280	5680
4	1725	4261	5361	6361	6861	7261
5	1889	3489	4589	5689	6289	6689
0	0,287	0,533	0,696	0,858	0,958	1,000
1	0,275	0,520	0,686	0,846	0,951	1,000
2	0,265	0,509	0,677	0,833	0,937	1,000
3	0,262	0,506	0,683	0,842	0,930	1,000
4	0,238	0,587	0,738	0,876	0,945	1,000
5	0,282	0,522	0,686	0,851	0,940	1,000

Schätzung der Anteile

Schaden–jahr	Abwicklungsjahr 0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	200
2	1265	1168	800	744	500	300
3	1490	1383	1007	900	500	400
4	1725	2536	1100	1000	500	400
5	1889	1600	1100	1100	600	400
0	0,287	0,245	0,163	0,162	0,100	0,042
1	0,275	0,245	0,166	0,160	0,104	0,049
2	0,265	0,245	0,167	0,156	0,105	0,063
3	0,262	0,243	0,177	0,158	0,088	0,070
4	0,238	0,349	0,151	0,138	0,069	0,055
5	0,282	0,239	0,164	0,164	0,090	0,060

Schätzung der Faktoren

Für die Schätzung der Parameter $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des Abwicklungsmusters für Faktoren stehen für Abwicklungsjahr k zunächst alle Schätzer

$$\widehat{\varphi}_{i,k} \quad := \quad S_{i,k}/S_{i,k-1}$$

mit $i = 0, 1, \ldots, n-k$ zur Verfügung.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0		1,853	1,306	1,233	1,116	1,044
1		1,889	1,319	1,234	1,123	1,052
2		1,923	1,329	1,230	1,126	1,067
3		1,928	1,351	1,232	1,105	1,076
4		2,470	1,258	1,187	1,079	1,058
5		1,847	1,351	1,240	1,105	1,064

Chain–Ladder Faktoren

Die Chain–Ladder Faktoren

$$\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}} \quad := \quad \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \, \widehat{\varphi}_{j,k} \quad = \quad \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

sind Schätzer für die Faktoren φ_k.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					
$\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}$		2,051	1,329	1,232	1,120	1,044

Chain–Ladder Quoten

Die Chain–Ladder Quoten

$$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}} := \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\widehat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}}$$

sind Schätzer für die Abwicklungsquoten γ_k.

	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
$\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}$		2,051	1,329	1,232	1,120	1,044
$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}}$	0,255	0,522	0,694	0,855	0,958	1,000

Schätzung der Raten

Für die Schätzung der Parameter $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des Abwicklungsmusters für Raten stehen für Abwicklungsjahr k zunächst alle Schätzer

$$\widehat{\beta}_{i,k} \quad := \quad Z_{i,k}/Z_{i,0}$$

mit $i = 0, 1, \ldots, n-k$ zur Verfügung.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0	1,000	0,853	0,567	0,564	0,347	0,148
1	1,000	0,889	0,603	0,582	0,379	0,180
2	1,000	0,923	0,632	0,588	0,395	0,237
3	1,000	0,928	0,676	0,604	0,336	0,268
4	1,000	1,470	0,638	0,580	0,290	0,232
5	1,000	0,847	0,582	0,582	0,318	0,212

Panning Raten

Die Panning Raten

$$\widehat{\beta}_k^{\mathrm{PA}} := \sum_{j=0}^{n-k} \frac{Z_{j,0}^2}{\sum_{h=0}^{n-k} Z_{h,0}^2} \widehat{\beta}_{j,k} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k} Z_{j,0}}{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,0}^2}$$

sind Schätzer für die Raten β_k.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	2536				
5	1889					
$\widehat{\beta}_k^{\mathrm{PA}}$	1,000	1,092	0,632	0,580	0,365	0,148

Panning Quoten

Die Panning Quoten

$$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{PA}} := \frac{\sum_{l=0}^{k} \widehat{\beta}_l^{\mathrm{PA}}}{\sum_{l=0}^{n} \widehat{\beta}_l^{\mathrm{PA}}}$$

sind Schätzer für die Abwicklungsquoten γ_k.

	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
$\widehat{\beta}_k^{\mathrm{PA}}$	1,000	1,092	0,632	0,580	0,365	0,148
$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{PA}}$	0,262	0,548	0,714	0,866	0,961	1,000

Schätzung der Schadenquotenzuwächse

Für die Schätzung der Parameter $\zeta_0(\pi), \zeta_1(\pi), \ldots, \zeta_n(\pi)$ des Abwicklungsmusters für Schadenquotenzuwächse stehen für Abwicklungsjahr k zunächst alle Schätzer

$$\widehat{\zeta}_{i,k}(\pi) \quad := \quad Z_{i,k}/\pi_i$$

mit $i = 0, 1, \ldots, n-k$ zur Verfügung.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5	
0	0,250	0,214	0,142	0,141	0,087	0,037	4000
1	0,247	0,220	0,149	0,144	0,094	0,044	4500
2	0,239	0,220	0,151	0,140	0,094	0,057	5300
3	0,248	0,231	0,168	0,150	0,083	0,067	6000
4	0,250	0,368	0,159	0,145	0,072	0,058	6900
5	0,230	0,195	0,134	0,134	0,073	0,049	8200

Additive Schadenquotenzuwächse

Die additiven Schadenquotenzuwächse

$$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\pi) \;:=\; \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\pi_j}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h} \widehat{\zeta}_{j,k}(\pi) \;=\; \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}$$

sind Schätzer für die Schadenquotenzuwächse ζ_k.

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5	π_i
0	1001	854	568	565	347	148	4000
1	1113	990	671	648	422		4500
2	1265	1168	800	744			5300
3	1490	1383	1007				6000
4	1725	2536					6900
5	1889						8200
$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}$	0,243	0,260	0,154	0,142	0,090	0,037	

Additive Quoten

Die additiven Quoten

$$\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \quad := \quad \frac{\sum_{l=0}^{k} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}{\sum_{l=0}^{n} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})}$$

sind Schätzer für die Abwicklungsquoten γ_k.

	Abwicklungsjahr k					
	0	1	2	3	4	5
$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}$	0,243	0,260	0,154	0,142	0,090	0,037
$\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}}$	0,263	0,543	0,709	0,862	0,960	1,000

Fazit zu den Abwicklungsmustern

- Es gibt verschiedene Sichtweisen auf Abwicklungsmuster.
- Zur Schätzung kann unterschiedliche Information verwendet werden.
- Das Abwicklungsmuster für Quoten eignet sich zum Vergleich der verschiedenen Schätzungen.

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Erweitertes Bornhuetter–Ferguson Verfahren (1)

Dem erweiterten Bornhuetter–Ferguson Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass

- ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt und dass
- a–priori Schätzer

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\gamma}_n$$

  mit $\widehat{\gamma}_n = 1$ für die Abwicklungsquoten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ und
- a–priori Schätzer

$$\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_n$$

  für die erwarteten Endschadenstände

$$\alpha_i \quad := \quad E[S_{i,n}]$$

  mit $i = 0, 1, \ldots, n$ verfügbar sind.

Erweitertes Bornhuetter–Ferguson Verfahren (2)

Die a–priori Schätzer können aus

- interner Information (Abwicklungsdreieck),
- Volumenmaßen (Prämien für den vorliegenden Bestand),
- externer Information (Marktstatistiken oder Daten aus ähnlichen Beständen) oder
- einer Kombination dieser Informationsquellen

gewonnen werden.

Erweitertes Bornhuetter–Ferguson Verfahren (3)

Für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $k = n - i, \ldots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}^{\text{BF}}_{i,k} \quad := \quad S_{i,n-i} + \Big(\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}\Big)\widehat{\alpha}_i$$

als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezeichnet.

Beim Bornhuetter–Ferguson Verfahren werden also die aktuellen Schadenstände mit Hilfe

- der a–priori Schätzer $\widehat{\alpha}_i$ für die erwarteten Endschadenstände und
- der a–priori Schätzer $\widehat{\gamma}_k$ für die Schadenquoten

linear fortgeschrieben.

Wichtig ist die Trennung von Abwicklungsmuster und erwartetem Endschadenstand.

Erweitertes Bornhuetter–Ferguson Verfahren (4)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5	$\widehat{\alpha}_i$
0						3483	3520
1					3844	4043	3980
2				3977	4393	4624	4620
3			3880	4729	5238	5521	5660
4		4261	5379	6310	6869	7180	6210
5	1889	3472	4611	5560	6130	6447	6330
$\widehat{\gamma}_k$	0,280	0,530	0,710	0,860	0,950	1,000	

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Loss–Development Verfahren (1)

Dem Loss–Development Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass

- ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt und dass
- a–priori Schätzer

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\gamma}_n$$

mit $\widehat{\gamma}_n = 1$ für die Abwicklungsquoten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ verfügbar sind.

Loss–Development Verfahren (2)

Für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $k = n-i, \ldots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} \quad := \quad \widehat{\gamma}_k \, \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

als Loss–Development Prädiktoren bezeichnet.

Beim Loss–Development Verfahren werden die aktuellen Schadenstände

- zunächst mit Hilfe des Schätzers $\widehat{\gamma}_{n-i}$ auf das Niveau des letzten Abwicklungsjahres n und
- sodann mit Hilfe des Schätzers $\widehat{\gamma}_k$ auf das Niveau des Abwicklungsjahres k

skaliert.

Loss–Development Verfahren (3)

Wegen

$$\widehat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} \;=\; S_{i,n-i} + \left(\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}\right) \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

lassen sich die Loss–Development Prädiktoren als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich

- der a–priori Schätzer $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_n$ der Schadenquoten und
- der a–priori Schätzer vom Loss–Development Typ

$$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{LD}}(\widehat{\gamma}) \;:=\; \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

  der erwarteten Endschadenstände

interpretieren.

Loss–Development Verfahren (4)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0						3483
1					3844	4046
2				3977	4393	4624
3			3880	4700	5192	5465
4		4261	5708	6914	7638	8040
5	1889	3576	4790	5802	6409	6746
$\widehat{\gamma}_k$	0,280	0,530	0,710	0,860	0,950	1,000

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Chain–Ladder Verfahren (1)

Dem Chain–Ladder Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass ein Abwicklungsmuster für Faktoren vorliegt.

Das Chain–Ladder Verfahren beruht ausschließlich auf den beobachtbaren Schadenständen des Abwicklungsdreiecks und verwendet keine externe Information.

Chain–Ladder Verfahren (2)

Für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $k = n - i, \ldots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} \;:=\; S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \widehat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}$$

als Chain–Ladder Prädiktoren bezeichnet.

Beim Chain–Ladder Verfahren werden die aktuellen Schadenstände mit Hilfe der Chain–Ladder Faktoren $\widehat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}$ schrittweise auf das Niveau des Abwicklungsjahres k skaliert.

Chain–Ladder Verfahren (3)

Wegen

$$\begin{aligned} \widehat{S}^{\text{CL}}_{i,k} &= \widehat{\gamma}^{\text{CL}}_k \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}} \\ &= S_{i,n-i} + \left(\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_k - \widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}\right) \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}} \end{aligned}$$

lassen sich die Chain–Ladder Prädiktoren als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich

- der Chain–Ladder Quoten $\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_0, \widehat{\gamma}^{\text{CL}}_1, \dots, \widehat{\gamma}^{\text{CL}}_n$ und
- der a–priori Schätzer von Loss–Development Typ

$$\widehat{\alpha}^{\text{LD}}_i(\widehat{\gamma}^{\text{CL}}) := \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}^{\text{CL}}_{n-i}}$$

der erwarteten Endschadenstände

interpretieren.

Chain–Ladder Verfahren (4)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4013
2	1265	2433	3233	3977	4454	4652
3	1490	2873	3880	4781	5354	5592
4	1725	4261	5662	6976	7813	8160
5	1889	3875	5148	6344	7105	7420
$\widehat{\varphi}_k^{\mathrm{CL}}$		2,051	1,329	1,232	1,120	1,044

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Cape–Cod Verfahren (1)

Dem Cape–Cod Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass

- ein Abwicklungsmuster für Quoten vorliegt und dass
- a–priori Schätzer

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_n$$

  mit $\widehat{\gamma}_n = 1$ für die Abwicklungsquoten $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ und
- ein Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ von Volumenmassen verfügbar sind, sowie
- eine Endschadenquote κ exisitiert, so dass

$$\kappa = E\left[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right]$$

  für alle $i = 0, 1, \dots, n$ gilt.

Cape–Cod Verfahren (2)

Für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $k = n - i, \ldots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}^{\mathrm{CC}}_{i,k} \quad := \quad S_{i,n-i} + \Big(\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}\Big)\pi_i\, \widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}(\widehat{\gamma}, \boldsymbol{\pi})$$

mit der Cape–Cod Endschadenquote

$$\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}(\widehat{\gamma}, \boldsymbol{\pi}) \quad := \quad \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \widehat{\gamma}_{n-j}\, \pi_j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\widehat{\gamma}_{n-j}\, \pi_j}{\sum_{k=0}^{n} \widehat{\gamma}_{n-k}\, \pi_k}\, \frac{S_{j,n-j}}{\widehat{\gamma}_{n-j}\, \pi_j}$$

als Cape–Cod Prädiktoren bezeichnet.

Beim Cape–Cod Verfahren werden die aktuellen Schadenstände mit Hilfe

- der mit der Schadenquote $\widehat{\kappa}^{\mathrm{CC}}(\widehat{\gamma}, \boldsymbol{\pi})$ normierten Volumenmasse π_i und
- der a–priori Schätzer $\widehat{\gamma}_k$ der Abwicklungsquoten

linear fortgeschrieben.

Cape–Cod Verfahren (3)

Wegen

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CC}} = S_{i,n-i} + \Big(\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}\Big)\pi_i\,\widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}},\boldsymbol{\pi})$$

lassen sich die Cape–Cod Prädiktoren als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich

- der a–priori Schätzer $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\gamma}_n$ der Schadenquoten und
- der a–priori Schätzer vom Cape–Cod Typ

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{CC}}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}},\boldsymbol{\pi}) := \pi_i\,\widehat{\kappa}^{\text{CC}}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}},\boldsymbol{\pi})$$

  der erwarteten Endschadenstände

interpretieren.

Cape–Cod Verfahren (4)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5	π_i
0						3483	4000
1					3844	4052	4500
2				3977	4419	4664	5300
3			3880	4713	5213	5491	6000
4		4261	5411	6369	6944	7263	6900
5	1889	3787	5153	6292	6975	7354	8200
$\widehat{\gamma}_k$	0,280	0,530	0,710	0,860	0,950	1,000	
$\widehat{\kappa}^{CC}$							0.926

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Additives Verfahren (1)

Dem additivem Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass

- ein Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ von Volumenmassen verfügbar ist und
- dass bezüglich dieser Volumenmasse ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse vorliegt.

Additives Verfahren (2)

Für $i = 0, 1, \dots, n$ und $k = n - i, \dots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{AD}} \quad := \quad S_{i,n-i} + \pi_i \sum_{l=n-i+1}^{k} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

als additive Prädiktoren bezeichnet.

Beim additiven Verfahren werden die aktuellen Schadenstände mit Hilfe

- der Prämien π_i und
- der additiven Schadenquotenzuwächse $\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$

schrittweise linear fortgeschrieben.

Additives Verfahren (3)

Wegen

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{AD}} = S_{i,n-i} + \left(\widehat{\gamma}_k^{\text{AD}} - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{AD}}\right) \pi_i \sum_{l=0}^{n} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

lassen sich die additiven Prädiktoren als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich

- der additven Quoten $\widehat{\gamma}_0^{\text{AD}}, \widehat{\gamma}_1^{\text{AD}}, \ldots, \widehat{\gamma}_n^{\text{AD}}$ und
- der a–priori Schätzer vom additivem Typ

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi}) := \pi_i \sum_{l=0}^{n} \widehat{\zeta}_l^{\text{AD}}(\boldsymbol{\pi})$$

der erwarteten Endschadenstände

interpretieren.

Additives Verfahren (4)

Es gilt

$$\pi_i \sum_{l=0}^{n} \widehat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \quad = \quad \pi_i \, \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \widehat{\gamma}_{n-j}^{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \, \pi_j}$$

und damit

$$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{\pi}) \quad = \quad \widehat{\alpha}_i^{\mathrm{CC}}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{\pi})$$

Damit kann das additive Verfahren als
Spezialfall des Cape-Cod Verfahrens angesehen werden,
bei dem die a–priori Schätzer für die Abwicklungsquoten
durch die additiven Quoten ersetzt werden.

Additives Verfahren (5)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5	π_i
0	1001	854	568	565	347	148	4000
1	1113	990	671	648	422	167	4500
2	1265	1168	800	744	479	196	5300
3	1490	1383	1007	851	543	222	6000
4	1725	2536	1061	979	624	255	6900
5	1889	2129	1261	1163	742	303	8200
$\widehat{\zeta}_k^{\text{AD}}$	0,243	0,260	0,154	0,142	0,090	0,037	

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
  - Das Loss–Development Verfahren
  - Das Chain–Ladder Verfahren
  - Das Cape–Cod Verfahren
  - Das additive Verfahren
  - Das Verfahren von Panning
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip

Verfahren von Panning (1)

Dem Verfahren von Panning liegt die Annahme zugrunde, dass ein Abwicklungsmuster für Raten vorliegt.

Das Verfahren von Panning beruht ausschließlich auf den beobachtbaren Schadenständen des Abwicklungsdreiecks und verwendet keine externe Information.

Verfahren von Panning (2)

Für $i = 0, 1, \dots, n$ und $k = n - i, \dots, n$ werden die Prädiktoren

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{PA}} \;:=\; S_{i,n-i} + Z_{i,0} \sum_{l=n-i+1}^{k} \widehat{\beta}_l^{\text{PA}}$$

als Panning Prädiktoren bezeichnet.

Beim Verfahren von Panning werden die aktuellen Schadenstände mit Hilfe

- der Zuwächse $Z_{i,0}$ und
- der Panning Raten $\widehat{\beta}_k^{\text{PA}}$

schrittweise linear fortgeschrieben.

Verfahren von Panning (3)

Wegen

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{PA}} \;=\; S_{i,n-i} + \left(\widehat{\gamma}_k^{\text{PA}} - \widehat{\gamma}_{n-i}^{\text{PA}}\right) Z_{i,0} \sum_{l=0}^{n} \widehat{\beta}_l^{\text{PA}}$$

lassen sich die Panning Prädiktoren als Bornhuetter–Ferguson Prädiktoren bezüglich

- der Panning Quoten $\widehat{\gamma}_0^{\text{PA}}, \widehat{\gamma}_1^{\text{PA}}, \dots, \widehat{\gamma}_n^{\text{PA}}$ und
- der a–priori Schätzer vom Panning Typ

$$\widehat{\alpha}_i^{\text{PA}} \;:=\; Z_{i,0} \sum_{l=0}^{n} \widehat{\beta}_l^{\text{PA}}$$

der erwarteten Endschadenstände

interpretieren.

Verfahren von Panning (4)

Schaden–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	165
2	1265	1168	800	744	461	187
3	1490	1383	1007	864	543	220
4	1725	2536	1089	1001	629	255
5	1889	2063	1193	1096	689	279
$\widehat{\beta}_k^{\mathrm{PA}}$	1,000	1,092	0,632	0,580	0,365	0,148

Übersicht

- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip
- Beispiele aus der Praxis

Bornhuetter–Ferguson Prinzip - Analytischer Teil

Prognose nach dem Bornhuetter–Ferguson Prinzip:

$$\widehat{S}_{i,k} \quad := \quad S_{i,n-i} + \Big(\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}\Big)\widehat{\alpha}_i$$

A–priori Schätzer	$\widehat{\alpha}_i$	$\widehat{\gamma}_k$
Bornhuetter–Ferguson	beliebig	beliebig
Loss–Development	$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{LD}}(\widehat{\gamma})$	beliebig
Chain–Ladder	$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{LD}}(\widehat{\gamma}^{\mathrm{CL}})$	$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}}$
Cape–Cod	$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{CC}}(\widehat{\gamma},\boldsymbol{\pi})$	beliebig
Additiv	$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{CC}}(\widehat{\gamma}^{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{\pi}),\boldsymbol{\pi})$	$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}}$
Panning	$\widehat{\alpha}_i^{\mathrm{PA}}$	$\widehat{\gamma}_k^{\mathrm{PA}}$

Bornhuetter–Ferguson Prinzip - Synthetischer Teil

	a-priori Quoten	additive Quoten	CL Quoten	Panning Quoten
a-priori Endschadenstand	Bornhuetter-Ferguson			
Cap-Cod Endschadenstand	Cape-Cod	Additives Verfahren		
Additiver Endschadenstand		Additives Verfahren		
Loss-Development Endschadenstand	Loss-Development		Chain-Ladder	
Panning-like Endschadenstand				Panning Verfahren
Panning Endschadenstand				Panning Verfahren

Die Berücksichtigung der nicht benannten und damit ”neuen” Verfahren entspricht dem Vorgehen in der Praxis.

Bornhuetter–Ferguson Prinzip - Simultane Anwendung

Die simultane Anwendung der zur Verfügung stehenden Verfahren in Form des erweiterten Bornhuetter–Ferguson Verfahrens ermöglicht

- die Trennung des Einflusses von Abwicklungsmuster und Endschadenstand auf die Reserve,
- Bewertung unterschiedlicher Informationsquellen (Marktstatistiken, Prämien) und
- das Erkennen der Bandbreite plausibler Reserven

Übersicht

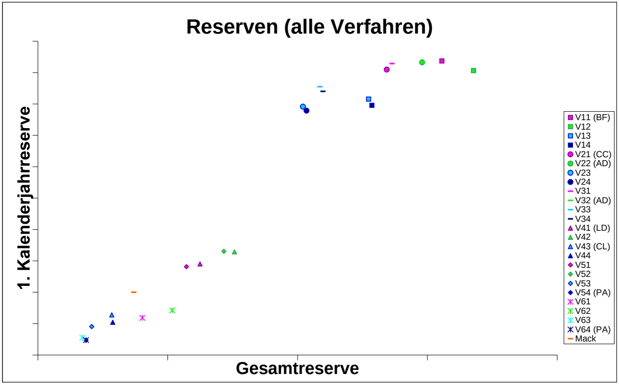
- Abwicklungsdreieck für Schadenstände
- Zwei bekannte Reservierungsverfahren
- Abwicklungsmuster
- Das erweiterte Bornhuetter–Ferguson Verfahren
- Das Bornhuetter-Ferguson Prinzip
- Beispiele aus der Praxis

Beispiel 1 - Haftpflichtportfeuille

Folgende Grössen wurden verwendet:

- Dreieck
  20 Schadenjahre, enthält Zahlungen
- a–priori Abwicklungsmuster
  Chain–Ladder Quoten Last 3
- a–priori Endschadenstand
  aktuelle Incurred–Endschadenstand
- Volumenmass
  geschätzte Schadenanzahl

Simultane Anwendung der Verfahren



Erkenntnisse:

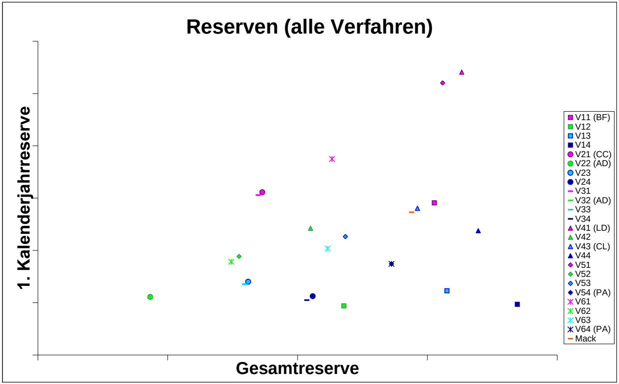
- Tailfaktor notwendig
- niedriger Durchschnittsschaden bei jungen Schadenjahren

Beispiel 2 - Haftpflichtportfeuille

Folgende Grössen wurden verwendet:

- Dreieck
  20 Schadenjahre, enthält Zahlungen
- a–priori Abwicklungsmuster
  Chain–Ladder Quoten Last 3
- a–priori Endschadenstand
  aktuelle Incurred–Endschadenstand
- Volumenmass
  geschätzte Schadenanzahl

Simultane Anwendung der Verfahren



Erkenntnisse:

- Tailfaktor nicht notwendig
- Abwicklungsmuster für 1. Kalenderjahrreserve entscheidend

Literatur

GDV (Hrsg.) [2008]: *Methoden zur Schätzung von Schaden- und Prämienrückstellungen.*

Mack, Th. [2006]: *Parameter estimation for Bornhuetter–Ferguson.* CAS Forum Fall 2006 S.141-157

Panning, W.H. [2006]: *Measuring loss reserve uncertainty.* CAS Forum Fall 2006 S.237-267

Radtke, M. und Schmidt, K.D. (Hrsg.) [2004]: *Handbuch zur Schadenreservierung.* Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft

Schmidt, K.D. [2006]: *Methods and models of loss reserving based on run-off triangles – A unifying survey.* CAS Forum Fall 2006 S.269-317

Schmidt, K.D. [2006]: *A Bibliography on Loss Reserving.* http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/dsvm/reserve.pdf

Schmidt, K.D. und Zocher, M. [2008]: *The Bornhuetter–Ferguson Principle.* Variance **2** S. 85-110