Markierte Punktprozesse und abstrakte kollektive Modelle

Anke Todtermuschke

21. Oktober 2011

- Versicherung besitzt Portfolio von Risiken
- Modellierung der eintretenden Schäden
- neben Schadeneintrittszeitpunkt besitzt jeder Schaden weitere Merkmale, z.B. Schadenhöhe oder Meldedauer
- Annahme, dass Schäden nacheinander eintreten, sonst Betrachtung von Schadenereignissen

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition

Eine Folge $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertigen Zufallsvariablen heißt einfacher Punktprozess, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

(1) $P[\{0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq ...\}] = 1$,

(2) $P[\{\tau_n < \tau_{n+1}\} \cap \{\tau_n < \infty\}] = P[\{\tau_n < \infty\}]$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

(3) $P[\{\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty\}] = 1$.

Interpretation: Eintrittszeitpunkte der Schäden

Zunächst definieren wir die Familie $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch

$$\eta_t(\omega) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{\{\tau_j \leq t\}}(\omega)$$

mit $\eta_t(\omega) = \infty$, falls $\tau_j \leq t$ ist für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$.

Des Weiteren leiten wir die Zufallsgröße η durch

$$\eta(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(\omega)$$

ab und nennen sie die Gesamtschadenzahl.

Es sei $\overline{E}$ eine beliebige Menge.

- $(E, \mathcal{E})$ sei ein Messraum mit $E \subset \overline{E} \to$ Markenraum
- $\Delta \in \overline{E} \setminus E$ sei ein beliebiges Element $\to$ irrelevante Marke

Nun definieren wir den Messraum $(E^{\Delta}, \mathcal{E}^{\Delta})$ durch

$$E^{\Delta} := E \cup \{\Delta\},$$

$$\mathcal{E}^{\Delta} := \sigma\Big(\mathcal{E} \cup \{\{\Delta\}\}\Big).$$

Definition

$\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei ein einfacher Punktprozess und $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge E^Δ-wertiger Zufallsgrößen.
Die Folge der Zufallspaare $\{(\tau_n, \zeta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt markierter Punktprozess mit dem Markenraum E, wenn folgende Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind:

(1) $P[\{\zeta_n \in E\} \cap \{\tau_n < \infty\}] = P[\{\tau_n < \infty\}]$,

(2) $P[\{\zeta_n = \Delta\} \cap \{\tau_n = \infty\}] = P[\{\tau_n = \infty\}]$.

Interpretation: Eintrittszeitpunkte und Merkmale der Schäden

Idee: Einteilung der Schäden in Kategorien

Sei $m \in \mathbb{N}$ und die Familie $\{C_i\}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ eine Zerlegung des Raumes $\mathbb{R}_+ \times E$.

Wir definieren nun für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung $\nu_j^i : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned}
\nu_0^i(\omega) &:= 0, \\
\nu_j^i(\omega) &:= \inf \left\{ k \in \mathbb{N} | \nu_{j-1}^i(\omega) < k \text{ und } (\tau_k, \zeta_k)(\omega) \in C_i \right\}
\end{aligned}$$

für $j \in \mathbb{N}$ (mit $\nu_j^i(\omega) = \infty$, wenn $(\tau_k, \zeta_k)(\omega) \notin C_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\nu_{j-1}^i(\omega) < k$ gilt).

Anschließend definiert man die Folge $\{(\tau_j^i, \zeta_j^i)\}_{j\in\mathbb{N}}$ durch:

$$(\tau_j^i, \zeta_j^i)(\omega) := \begin{cases} (\tau_k, \zeta_k)(\omega) & \text{falls } \nu_j^i(\omega) = k \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \\ (\infty, \Delta) & \text{falls } \nu_j^i(\omega) = \infty \end{cases}$$

für $\omega \in \Omega$.

Satz

$\{(\tau_j^i, \zeta_j^i)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *ist ein MPP.*

Für beliebiges $i \in \{1, ..., m\}$ kann man analog zu erst die Familie $\{\eta_t^i\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ und die Größe η^i ableiten.

Es sei ein abstraktes kollektives Modell

$$\langle N, \{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

gegeben, wobei

- N eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}_0$ sei,
- $\{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{R}_+ \times E$ sei und
- für alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $P[\{T = t\}] = 0$ gelte.

D. h., die Folge $\{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist i.i.d. und unabhängig von N.

Es sollen jetzt die ersten N Paare der Folge $\{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ nach der Größe der ersten Koordinate geordnet werden.

Dazu definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, ..., n\}$ die Zufallsvariable:

$$R_i^n := \inf\{j \in \{1, ..., n\} | R_k^n \neq j \text{ für alle } k < i, T_{n:j} = T_i\}.$$

Wir konstruieren nun die Folge $\{(T_{(j)}, Z_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$(T_{(j)}, Z_{(j)}) := \begin{cases} \sum_{n=j}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{R_k^n = j\}} \cdot (T_k, Z_k) \cdot \chi_{\{N=n\}} & j \leq N, \\ (\infty, \Delta) & j > N. \end{cases}$$

Satz

$\{(T_{(j)}, Z_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ *ist ein MPP.*

Leiten wir wie erst die Familie $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch

$$N_t := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{\{T_{(j)}\leq t\}}$$

ab, dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} N_n = N.$$

Die Familie $\{C_i\}_{i \in \{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ sei definiert wie erst.

Zusatzannahme: Es gelte für alle $i \in \{1, ..., m\}$

$$P[\{(T, Z) \in C_i\}] \in (0, 1).$$

Für alle $i \in \{1, ..., m\}$ sei

$$N_i := \sum_{j=1}^{N} \chi_{\{(T_j, Z_j) \in C_i\}}.$$

Nun definieren wir für alle $i \in \{1, ..., m\}$ und alle $j \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung $\nu_{i;j} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} \nu_{i;0}(\omega) &:= 0, \\ \nu_{i;j}(\omega) &:= \inf\{k \in \mathbb{N} | \nu_{i;j-1}(\omega) < k \text{ und } (T_k, Z_k)(\omega) \in C_i\} \end{aligned}$$

für $j \in \mathbb{N}$ (mit $\nu_{i;j}(\omega) = \infty$, wenn $(T_k, Z_k)(\omega) \notin C_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\nu_{i;j-1}(\omega) < k$ gilt).

Wir definieren nun die Folge $\{(T_{i;j}, Z_{i;j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ wie folgt.
Sei $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times E$ beliebig gewählt. Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ sei

$$(T_{i;j}, Z_{i;j})(\omega) := \begin{cases} (T_k, Z_k)(\omega) & \text{falls } \nu_{i;j}(\omega) = k \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \\ (t, z) & \text{falls } \nu_{i;j}(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- $(T_{i;j}, Z_{i;j})$ ist eine Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{R}_+ \times E$.
- $P[\{(T_{i;j}, Z_{i;j}) \in C_i\}] = 1.$

Satz

Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ *ist das Paar*

$$\langle N_i, \{(T_{i;j}, Z_{i;j})\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$$

ein abstraktes kollektives Modell mit

$$P[\{(T_{i;j}, Z_{i;j}) \in D\}] = P[\{(T, Z) \in D\} | \{(T, Z) \in C_i\}]$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ *und* $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$*.*

Idee:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(T_{(j)}, Z_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} \arrow[d, "\text{zerlegen}"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{abstraktes kollektives}\\ \text{Modell}\\ \langle N, \{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle\end{array}} \arrow[l, "\text{ordnen}"'] \arrow[d, "\text{zerlegen}"] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(T^i_{(j)}, Z^i_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{l}\text{abstraktes kollektives}\\ \text{Modell}\\ \langle N_i, \{(T_{i;j}, Z_{i;j})\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle\end{array}} \arrow[l, "\text{ordnen}"']
\end{tikzcd}$$

Definition

Ein Schadenzahl-Prozess $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ heißt verallgemeinerter inhomogener Poisson-Prozess, wenn für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und alle $t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ mit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, sowie $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_0$

$$P[\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}] = \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} e^{-\alpha\cdot\mu[(t_{j-1},t_j]]} \frac{(\alpha\cdot\mu[(t_{j-1},t_j]])^{k_j}}{k_j!}\, dQ(\alpha)$$

gilt, wobei

- $Q : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ eine beliebige Verteilung mit $Q[(0,\infty)] = 1$ und $\int_{\mathbb{R}} \alpha\, dQ(\alpha) < \infty$ und
- $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow [0,\infty]$ ein Maß mit der Eigenschaft, dass für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ die Bedingungen $\mu[(s,t]] < \infty$ und $\mu[\{s\}] = 0$ erfüllt sind, sei.

Spezialfälle:

	μ	Q
homogener PP mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$	$\lambda \cdot \boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\delta}_1$
inhomogener PP mit Intensitätsfunktion $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$	$\int \lambda(r)\ d\boldsymbol{\lambda}(r)$	$\boldsymbol{\delta}_1$
gemischter PP bzgl. der Verteilung $\mathcal{Q}$	$\boldsymbol{\lambda}$	$\mathcal{Q}$

Annahmen:

1. Es sei $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein verallgemeinerter inhomogener Poisson-Prozess bzgl. einer Verteilung Q und mit einem endlichem Intensitätsmaß μ.
   Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ sei $T_n(\omega)$ definiert durch
   $$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) \geq n\}$$
   mit $\inf \emptyset := \infty$.

   ▷ $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein einfacher Punktprozess.

2. Weiterhin sei eine Folge von Zufallsgrößen $\{Z_n^o\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in E gegeben mit den Eigenschaften:
   (i) Die Folge sei $\sigma^*(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}})$-bedingt unabhängig.
   (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $B \in \mathcal{E}$ gelte: $P[\{Z_n^o \in B\}|\sigma^*(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}})] = P[\{Z_n^o \in B\}|\sigma(T_n)]$.
   (iii) Es existiere ein Markov-Kern $K : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$, der für alle $n \in \mathbb{N}$ eine bedingte Verteilung von Z_n^o unter der Hypothese ist, dass $T_n = t$ ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ definieren wir $Z_n(\omega)$ durch

$$Z_n(\omega) := \begin{cases} Z_n^o(\omega) & \text{falls } T_n(\omega) < \infty, \\ \Delta & \text{falls } T_n(\omega) = \infty. \end{cases}$$

▷ $\{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein MPP.

Idee: Ausnutzung des Zusammenhangs zwischen einem MPP und einem abstrakten kollektiven Modell.

Problem: Existiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein AKM, aus dem sich mittels der Konstruktion gerade der spezielle MPP herleiten lässt?

Ausweg:

Konstruktion eines neuen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(T_j, Z_j)\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Kopie}"] \arrow[d, "\text{zerlegen}"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(\hat{T}_{(j)}, \hat{Z}_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} \arrow[d, "\text{zerlegen}"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{abstraktes kollektives Modell}\\ \left\langle \hat{N}, \{(\hat{T}_j, \hat{Z}_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \right\rangle\end{array}} \arrow[l, "\text{ordnen}"'] \arrow[d, "\text{zerlegen}"] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(T^i_j, Z^i_j)\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Kopie}"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{MPP}\\ \{(\hat{T}^i_{(j)}, \hat{Z}^i_{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{l}\text{abstraktes kollektives Modell}\\ \left\langle \hat{N}_i, \{(\hat{T}_{i;j}, \hat{Z}_{i;j})\}_{j\in\mathbb{N}} \right\rangle\end{array}} \arrow[l, "\text{ordnen}"']
\end{tikzcd}$$

Ergebnisse:

- Die Verteilung der markierten Punktprozesse $\{(T_j^i, Z_j^i)\}_{j\in\mathbb{N}}$ konnte bestimmt werden.
- Die aus den markierten Punktprozessen abgeleiteten Prozesse $\{N_t^i\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sind selbst verallgemeinerte inhomogene Poisson-Prozesse.
- Im Spezialfall, dass $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ein inhomogener Poisson-Prozess ist, sind auch die Prozesse $\{N_t^i\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ inhomogene Poisson-Prozesse.

- Modellierung von Schäden durch einen MPP
- Betrachtung des Zusammenhangs zwischen einem AKM und einem MPP
- Untersuchung der Zerlegung eines speziellen MPP's mittels dieses Zusammenhangs

- bisher keine Annahmen bzgl. der Struktur des Markenraums
  - ▷ Untersuchung spezieller Strukturen
  - ▷ Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen den Merkmalen
- Funktioniert die Vorgehensweise auch unter anderen Verteilungsannahmen?

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

- *Hess, K. Th.:* Random Partitions of Samples. In: Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik 1/2000
- *Jacobsen, M.,* Point Process Theory and Applications - Marked Point and Piecewise Deterministic Processes. Boston - Basel - Berlin, Birkhäuser, 2006
- *Larsen, C.R.:* An individual claims reserving model. In: ASTIN Bulletin **37** (2007), p.13-132
- *Norberg, R.:* Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. In: ASTIN Bulletin **23** (1993), p.95-115
- *Norberg, R.:* Prediction of outstanding liabilities II. In: ASTIN Bulletin **29** (1999), p.5-25
- *Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. und Teugels, J.:* Stochastic Processes for Insurance and Finance. Chichester - New York - Weinheim, Wiley, 1999
- *Schmidt, K.D.:* Lectures on Risk Theory. Stuttgart, Teubner, 1996