

**Aufgabe 1** (Grundzüge von Python)

In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit den Grundzügen der Programmiersprache Python 3 (siehe [www.python.org](http://www.python.org)) vertraut machen. In der Vorlesung werden wir insbesondere die NumPy- und SciPy-Bibliotheken für numerische Funktionen sowie die Matplotlib-Bibliothek zur Visualisierung verwenden.

Hinweis: Geben Sie Ihre Lösungen schriftlich ab, also Programmiercode gegebenenfalls ausdrucken anstatt elektronisch per E-Mail oder ähnliches zu verschicken. Ausnahme sind Testaufgaben: hier sollen Sie Ihr Programm "live" vorstellen.

- (a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `product(nums)`, die das Produkt der Zahlen in der Liste `nums` berechnet. Zum Beispiel soll also `product([3, 4, -1, 2.5])` den Wert `-30.0` zurückgeben. [2 Punkte]
- (b) Wie lautet die Ausgabe des folgenden Python-Skripts? Wie speichert also NumPy Matrixeinträge ("row-major" oder "column-major")? [2 Punkte]

```
import numpy as np
a = np.array([1, -3, 2.5, 4, 7.1, 2])
b = a.reshape((2, 3))
print(b + 1)
```

- (c) Schreiben Sie ein Python-Programm, das die Funktion

$$f(x) = \sin(5x) e^{-\frac{1}{10}x^2}$$

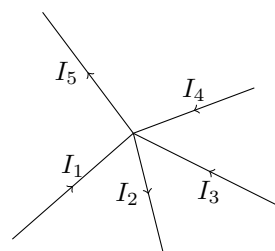
auf dem Intervall  $[0, 4\pi]$  mittels Matplotlib visualisiert. [2 Punkte]

**Aufgabe 2** (Stromkreis)

Ein elektrischer Schaltkreis gehorcht den Kirchhoffschen Regeln:

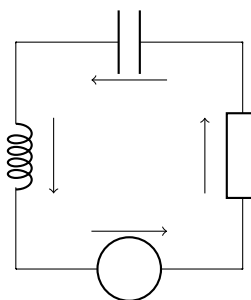
- **Knotenregel** (junction rule): Die Summe aller in einen Schaltungsknoten zufließenden und abfließenden Ströme ist gleich Null:

$$\sum_{k \in \text{Knoten}} I_k = 0.$$

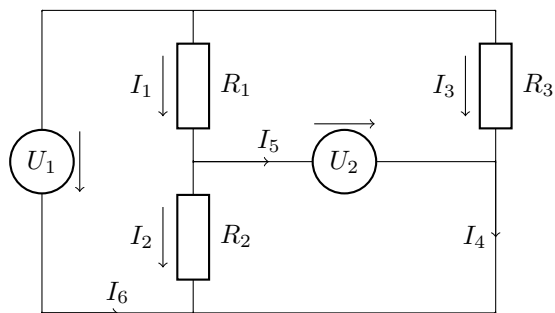


- **Maschenregel** (loop rule): Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche (geschlossener Umlauf) ist gleich Null:

$$\sum_{k \in \text{Masche}} U_k = 0.$$

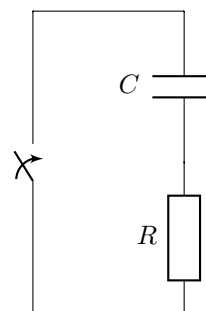


- (a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für den skizzierten Stromkreis auf (Vorzeichen entsprechend der Pfeilrichtungen). Die an einem Widerstand  $R$  abfallende Spannung beträgt laut Ohmschen Gesetz  $U = RI$ , wobei  $I$  die Stromstärke bezeichnet. [2 Punkte]



- (b) Berechnen Sie die Ströme  $I_1$  bis  $I_6$  für  $U_1 = 2\text{ V}$ ,  $U_2 = 1\text{ V}$  und  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $R_3 = 2\Omega$ . [2 Punkte]

- (c) Entladung eines Kondensators: zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der skizzierte Schaltkreis geschlossen, so dass sich der Kondensator mit Kapazität  $C$  entlädt. Die Spannung am Kondensator beträgt  $U = Q/C$ , wobei  $Q$  die momentane Ladung bezeichnet. Wenden Sie die Maschenregel auf den Schaltkreis an, und verwenden Sie anschließend  $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ , d.h. der Strom ist gleich der zeitlichen Änderung der Ladung. Lösen Sie nun die erhaltene Differentialgleichung für anfängliche Ladung  $Q_0$ . Wie hängt also die Zeitskala der Entladung von  $R$  und  $C$  ab? [2 Punkte]



### Aufgabe 3 (Fallender Regentropfen)

Ein kugelförmiger Tropfen Wasser mit Masse  $m$ , Radius  $r$  sowie konstanter Dichte  $\rho_W$  fällt (unter dem Einfluss des Gravitationsfelds  $g$ ) durch eine bewegungslose Nebelwolke mit gleichförmiger Dichte  $\rho_N$ . Hierbei sammelt der Tropfen die Feuchtigkeit in der Wolke auf, seine Masse und sein Radius nehmen also zu. Bezeichne die (in Richtung Boden) zurückgelegte Strecke mit  $z(t)$ , und die Geschwindigkeit des Tropfens mit  $v = \dot{z}$ <sup>1</sup>. Wir können annehmen, dass anfangs  $z(0) = 0$  und  $v(0) = 0$ , d.h. der Tropfen startet in Ruhe.

- (a) Stellen Sie eine Gleichung für  $\dot{m}$  auf, also die zeitliche Änderung der Masse des Regentropfens. Leiten Sie die Beziehung

$$\dot{v} = g - \frac{3}{4} \frac{\rho_N}{\rho_W} \frac{v^2}{r}$$

für die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit her. [2 Punkte]

Hinweis: Betrachten Sie für  $\dot{m}$  das vom Tropfen pro Zeit überstrichene Volumen; für  $\dot{v}$  empfiehlt sich Newton's zweites Gesetz: die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Gravitationskraft  $mg$ , die auf den Tropfen wirkt.

- (b) Verwenden Sie die Beziehung zwischen  $r$  und  $m$ , um zu zeigen, dass  $r$  linear von  $z$  abhängt, d.h.  $r(t) = \alpha z(t) + r_0$  mit Anfangsradius  $r_0$ . Wie lautet die Proportionalitätskonstante  $\alpha$ ? [1 Punkt]
- (c) Zeigen Sie für den Fall  $r_0 = 0$ , dass

$$z(t) = \frac{1}{2} \frac{g}{7} t^2,$$

d.h. der Regentropfen unterliegt einem effektiven Gravitationsfeld  $\frac{g}{7}$ ! [2 Punkte]

- (d) Der typische Durchmesser einer Regenwolke beträgt 2 km, und die relevanten Dichten sind  $\rho_W \approx 1000\text{ kg/m}^3$  sowie  $\rho_N \approx 10^{-3}\text{ kg/m}^3$ . Schätzen Sie hiermit die Größe des Tropfens nach Durchqueren der Wolke ab, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem empirischen Wert  $\approx 1\text{ mm}$ . [1 Punkt]

<sup>1</sup>Physiker verwenden oft einen hochgestellten Punkt für die zeitliche Ableitung.