Aufgabe 4 (Basketball-Freiwurf)

(a) Modifizieren Sie das Python-Programm `plot_objective_func.py` auf der Webseite zur Vorlesung[1], so dass es die Zielfunktion $e(\theta^0)$ des ersten Modells zusätzlich für Spielergrößen $2.0\,\mathrm{m}$ und $1.87\,\mathrm{m}$ plottet. Wie ändert sich also der optimale Abwurfwinkel für kleinere Spieler? [2 Punkte]
Hinweis: für ein lauffähiges Programm werden zusätzlich die Python-Dateien `admissible_trajectory.py`, `parameters.py` und `angle_interval.py` benötigt. Am einfachsten speichern Sie alle Dateien im selben Verzeichnis.

(b) Schreiben Sie ein Python-Programm, das die Wurfparabel (mit Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_x^0 = v^0 \cos(\theta^0)$, $\dot{y}(0) = v_y^0 = v^0 \sin(\theta^0)$ und $v^0 = 6.5\,\mathrm{m/s}$, $\theta^0 = \pi/3$) basierend auf der Bewegungsgleichung mittels `scipy.integrate.odeint` für Zeitpunkte $t = 0, 0.1, \dots, 1$ berechnet. Verifizieren Sie das Ergebnis anhand der bekannten analytischen Lösung

$$x(t) = v_x^0 t,$$
$$y(t) = v_y^0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

[2 Punkte]
Hinweis: Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in der Form $\dot{s}(t) = f(s(t), t)$ mit der Zustandsvariablen $s(t) = (x(t), y(t), v_x(t), v_y(t))$. (Die explizite Zeitabhängigkeit von f wird hier nicht benötigt.) Implementieren Sie anschließend die Funktion f in Python und übergeben Sie diese als erstes Argument an `scipy.integrate.odeint`.

(c) Diskutieren Sie weitere Verfeinerungen des Modells. An welchen Stellen (Gleichungen, Zielfunktionen, ...) sind Anpassungen vorzunehmen bei Berücksichtigung (i) des Luftwiderstandes, oder (ii) von Würfen, die nach Abprallen vom Backboard in den Korb gehen? [2 Punkte]

Aufgabe 5 (Dimensionsanalyse und Skalierung)
Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) - D \partial_x^2 u(x,t) + v \partial_x u(x,t) + \alpha u(x,t) = 0$$

für die Konzentration $u(x,t)$ (z.B. einer chemischen Substanz), wobei der zweite Term die Diffusion mit Diffusionkonstante D, der dritte Term die Konvektion mit Geschwindigkeit v und der vierte Term den Abbau mit Rate α beschreibt.

(a) Leiten Sie ausgehend von $[x] = \mathsf{L}$, $[t] = \mathsf{T}$ und $[u] = \mathsf{L}^{-1}$ die Dimensionen der drei Parameter D, v und α ab. [2 Punkte]

(b) Wie müssen charakteristische Größen x_0, t_0 und u_0 mit $x = x_0 \hat{x}$, $t = t_0 \hat{t}$, $u = u_0 \hat{u}$ (und dimensionslosen $\hat{x}$, $\hat{t}$, $\hat{u}$) gewählt werden, um die Differentialgleichung auf die Form

$$\partial_{\hat{t}} \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) - \hat{D} \partial_{\hat{x}}^2 \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) + \partial_{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) + \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) = 0$$

zu transformieren? Wie lautet der verbleibende Parameter $\hat{D}$? [2 Punkte]

(c) Es seien zusätzlich die Anfangs- und Randbedingungen $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le \ell$ und $u(0,t) = g(t)$, $0 \le t \le \tau$ vorgegeben. Wie transformieren sich die ursprünglichen Parameter D, v und α sowie die Funktionen f und g, wenn Sie die Definitionsbereiche $x \in [0,\ell]$ und $t \in [0,\tau]$ auf das Intervall $[0,1]$ skalieren? [2 Punkte]

[1] https://tu-dresden.de/mn/math/wir/mendl/studium/courses/mosim_2017_wise

Aufgabe 6 (Spiralmuster)
Spiralmuster in der Natur, wie z.B. der Blütenstand einer Sonnenblume, lassen sich oft durch Iterationsvorschriften beschreiben.[2] Wir bezeichnen die Positionen der einzelnen Bestandteile (etwa der Samenkerne bei der Sonnenblume) mit $p_n \in \mathbb{R}^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Im einfachsten Fall ist die Iterationsvorschrift von der Form

$$p_{n+1} = T(p_n)$$

mit einer Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, d.h. die nächste Position hängt nur von der aktuellen Position ab. Wir verwenden im Folgenden Polarkoordinaten $p_n = r_n(\cos(\psi_n), \sin(\psi_n))$ mit Radius $r_n \geq 0$ und Winkel ψ_n, und untersuchen

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta\psi, \quad r_{n+1} = a\sqrt{\psi_{n+1}}$$

mit Startwerten $\psi_0 = 0$, $r_0 = 0$. Der "Divergenzwinkel" $\Delta\psi$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten ist also konstant.

(a) Bei der Anordnung von Blättern um eine Achse werden Divergenzwinkel $\Delta\psi = 2\pi q$ mit

$$q = \frac{F_k}{F_{k+2}}$$

beobachtet, wobei F_k die k-te Fibonacci-Zahl $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ bezeichnet. Begründen Sie allgemein für rationales $q \in \mathbb{Q}$, dass ein $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$ existiert, so dass die Punkte p_n, $p_{n+\ell}$, $p_{n+2\ell}$, ... (mit $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig) auf einem vom Zentrum ausgehenden Strahl liegen. [1 Punkt]

(b) Das Muster einer Sonnenblume lässt sich mittels (irrationalem) Divergenzwinkel

$$\Delta\psi_s = 2\pi \lim_{k\to\infty} \frac{F_k}{F_{k+2}}$$

erzeugen. Berechnen Sie den Grenzwert ausgehend von der Formel $F_k = (\varphi^k - (1-\varphi)^k)/\sqrt{5}$, wobei $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ der Goldene Schnitt ist. [1 Punkt]

(c) Für Divergenzwinkel $\Delta\psi_s$ und einer fest gewählten, nicht zu kleinen Fibonacci-Zahl ℓ werden Punkte p_n, $p_{n+\ell}$, $p_{n+2\ell}$, ... visuell als zusammengehörig empfunden (sogenannte Spiralarme). Begründen Sie dies anhand der entsprechenden Winkel. [2 Punkte]

(d) Das folgende Python-Programm

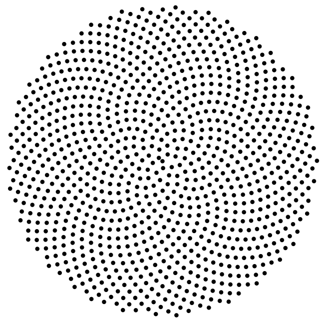
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 1000    # number of points

# difference angle
dpsi = 2*np.pi * (3 - np.sqrt(5))/2
psi  = dpsi * np.arange(n)

a = np.sqrt(n / (2*np.pi))
r = a*np.sqrt(psi)

plt.plot(r*np.cos(psi), r*np.sin(psi), 'k.', markersize=3.5)
plt.axis('equal'); plt.axis('off')
```



generiert das nebenstehende Spiralmuster. Erweitern Sie das Programm, so dass ein Spiralarm p_0, p_ℓ, $p_{2\ell}$, ... mit einer von Ihnen frei wählbaren Fibonacci-Zahl $\ell \geq 21$ eingezeichnet wird. Wie wirkt sich die "archimedische" Vorschrift $r_n = a\psi_n$ (anstatt $r_n = a\sqrt{\psi_n}$) auf das Muster aus? [2 Punkte]

[2] siehe z.B. http://www.science.smith.edu/phyllo/