

Aufgabe 10 (BGK Kollisionsoperator für die Boltzmann-Gleichung)

Der sogenannte BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) Kollisionsoperator approximiert die relativ komplizierte Integration in $\mathcal{C}[f]$ durch

$$\mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] = -\frac{1}{\tau} (f - f_{\text{MB}}).$$

Hierbei ist $\tau > 0$ eine charakteristische Zeitskala der Relaxation ins Gleichgewicht, und f_{MB} die Maxwell-Boltzmann Gleichgewichtsverteilung

$$f_{\text{MB}}(\vec{p}) = \rho \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{|\vec{p} - m\vec{u}|^2}{2m}}. \tag{1}$$

Die Parameter ρ, \vec{u}, β sind so gewählt, dass die Momente (durchschnittliche Dichte, Impuls, Energie) von f und f_{MB} übereinstimmen, d.h. (bei festgehaltenem \vec{x} und t)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{p}) f_{\text{MB}}(\vec{p}) d^3p = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{p}) f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p$$

für alle Kollisionsinvarianten $\varphi(\vec{p}) = 1, \vec{p}, \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2$. Die Parameter ρ, \vec{u}, β hängen also indirekt von \vec{x} und t ab. \mathcal{C}_{BGK} erfüllt dieselben Erhaltungssätze wie \mathcal{C} , da (per definitionem)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{p}) \mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] d^3p = 0. \tag{2}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass auch das H-Theorem (monotone Entropiezunahme) für \mathcal{C}_{BGK} gilt, d.h.

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \log(f) \mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] d^3p \geq 0$$

für beliebige Verteilungsfunktionen f mit $f(\vec{x}, \vec{p}, t) > 0$.

(a) Zeigen Sie zunächst (z.B. mittels Kurvendiskussion), dass $-(1 - \lambda) \log \lambda \geq 0$ für alle $\lambda > 0$, und $-(1 - \lambda) \log \lambda = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 1$. [2 Punkte]

(b) Durch Ergänzen von $f_{\text{MB}}(\vec{p})$ im Logarithmus erhält man

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \log(f) \mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] d^3p = -\int_{\mathbb{R}^3} \log\left(\frac{f}{f_{\text{MB}}}\right) \mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] d^3p - \int_{\mathbb{R}^3} \log(f_{\text{MB}}) \mathcal{C}_{\text{BGK}}[f] d^3p. \tag{3}$$

Begründen Sie, warum das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet. [2 Punkte]

Hinweis: Setzen Sie die Definition (1) ein und verwenden Sie Gl. (2).

(c) Setzen Sie nun die Definition von \mathcal{C}_{BGK} in das erste Integral auf der rechten Seite von Gl. (3) ein und begründen Sie mittels (a), dass der Integrand (inklusive des vorangestellten Minuszeichens) nicht-negativ ist. [2 Punkte]

Hinweis: Es gilt $f_{\text{MB}}(\vec{p}) > 0$, da die Dichte ρ als positiv angenommen werden kann.

Aufgabe 11 (Vektoranalysis)

Im Folgenden sei $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein zweimal stetig differenzierbares "Skalarfeld" und $\vec{u}, \vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare "Vektorfelder". Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ das Skalarprodukt und $\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k$ das Kreuzprodukt, wobei \vec{e}_i der Einheitsvektor in Richtung i und ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol ist. Ausgedrückt durch den Nabla-Operator $\nabla \equiv \partial_{\vec{x}} \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^T$ definiert man

$$\begin{aligned} \text{Gradient:} & \quad \nabla \rho \\ \text{Divergenz:} & \quad \nabla \cdot \vec{u} \\ \text{Rotation:} & \quad \nabla \times \vec{u} \end{aligned}$$

Entsprechend heißt ein Vektorfeld divergenzfrei (bzw. quellenfrei), falls $\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, und wirbelfrei, falls $\nabla \times \vec{u}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Rechnen Sie folgende Identitäten nach:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= (\nabla \rho) \cdot \vec{u} + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) \\ \nabla \times (\rho \vec{u}) &= (\nabla \rho) \times \vec{u} + \rho (\nabla \times \vec{u}) \\ \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u},\end{aligned}$$

wobei $\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ den Laplace-Operator bezeichnet. [2 Punkte]

(b) Zeigen Sie: [2 Punkte]

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \rho) &= 0 \quad \text{“ein Gradient ist wirbelfrei”} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) &= 0 \quad \text{“ein Rotationsfeld ist divergenzfrei”}\end{aligned}$$

(c) Sie haben die folgende Kontinuitätsgleichung für die Dichte (“Massenerhaltung”) kennengelernt, wobei die Dichte $\rho(\vec{x}, t)$ und das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$ jetzt zusätzlich von der Zeit t abhängen:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Welche Bedingung an \vec{u} erhalten Sie hieraus für räumlich und zeitlich konstantes $\rho > 0$? (sogenannter “inkompressibler” Fall) [2 Punkte]

Aufgabe 12 (Van-der-Pol Oszillator)

Das folgende skalare Anfangswertproblem wurde 1920 von dem Elektroingenieur van der Pol vorgeschlagen, um das Schwingungsverhalten gewisser nichtlinearer elektrischer Schaltkreise zu modellieren:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (4)$$

Die Größe $x(t)$ ist in diesem Fall die zeitabhängige elektrische Spannung. Für $\mu > 0$ beschreibt der zweite Term eine nichtlineare Dämpfung. Die Differentialgleichung wird auch z.B. zur Modellierung von oszillierenden biologischen Systemen eingesetzt.

Zur numerischen Lösung formulieren wir zunächst Gl. (4) als ein System erster Ordnung, wobei $y(t) = (x(t), \dot{x}(t))$:

$$\dot{y} = f(y, t), \quad f(y, t) = \begin{pmatrix} \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

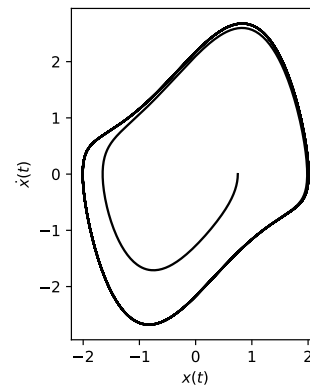
Das folgende Python-Programm berechnet die numerische Lösung mittels `scipy.integrate.odeint`:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

def f(y, t, mu):
    x, v = y
    return [v, mu*(1 - x**2)*v - x]

mu = 1
y0 = [0.75, 0]
t = np.linspace(0, 20*np.pi, 5001)

sol = odeint(f, y0, t, args=(mu,))
```



(a) Machen Sie sich mit der Funktionsweise des Programms vertraut, und visualisieren Sie die Phasenraumtrajektorien $(x(t), \dot{x}(t))$ (siehe obige Abbildung) für $\mu = 0, 0.1, 1$ mittels Matplotlib. Welchen Wertebereich von $x(t)$ beobachten Sie für $\mu > 0$ und große Zeiten t ? [2 Punkte]

Hinweis: Eine einheitliche Achsenskalierung kann man mit `plt.axes().set_aspect('equal')` erreichen.

(b) Man kann zeigen, dass die Lösung für $\mu > 0$ asymptotisch gegen einen eindeutigen Grenzzyklus konvergiert. Berechnen und visualisieren Sie die Grenzzyklen für $\mu = 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 4$, indem Sie $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$ als Startwert wählen. Wie verhält sich der Maximalwert von $\dot{x}(t)$ in Abhängigkeit von μ ? [2 Punkte]

(c) Plotten Sie nun $x(t)$ als Funktion von t für die Grenzzyklen mit $\mu = 2, 4$ im Zeitintervall $[0, 10\pi]$, und schätzen Sie die entsprechende Periode eines Zyklus ab. Wie verhält sich diese also mit wachsendem μ ? [2 Punkte]