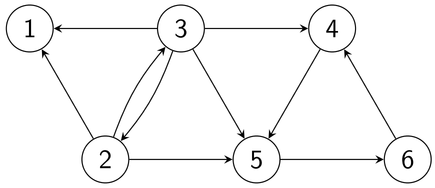
Aufgabe 16 (Hyperlink-Struktur)
Wir untersuchen die Hyperlink-Struktur des folgenden Modell-Internets:



(a) Stellen Sie die Hyperlink-Matrix $H = (h_{ij})$ mit Einträgen

$$h_{ij} = \begin{cases} 1/|S_i| & S_i \text{ besitzt einen Link auf } S_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf, wobei $|S_i|$ die Anzahl der ausgehenden Links der Seite S_i bezeichnet. [2 Punkte]

(b) Berechnen Sie (symbolisch oder numerisch mit Angabe des entsprechenden Codes) die Eigenwerte von H. Wie viele Eigenwerte λ mit $|\lambda| = 1$ gibt es? [2 Punkte]

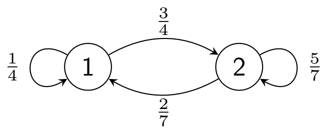
(c) Begründen Sie, dass die Iterationsvorschrift

$$\pi^{k+1} = H^T \pi^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

im Allgemeinen nicht konvergiert, indem Sie als anfängliche Zustandsverteilung $\pi^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ wählen. [2 Punkte]

Aufgabe 17 (Markov-Ketten)
Die Übergangsmatrix (bzw. Rekursionsmatrix) P einer diskreten Markov-Kette lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Übergangsgraphen visualisieren. Zum Beispiel lautet dieser für eine Kette mit zwei Zuständen $\{1, 2\}$ und

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} :$$



Wir betrachten nun eine diskrete Markov-Kette mit 3 Zuständen $\{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den entsprechenden Übergangsgraphen. [2 Punkte]

(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung π, so dass

$$P^T \pi = \pi$$

mit Normierung $\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$. [2 Punkte]

(c) Es bezeichne X_k, $k = 0, 1, \dots$ die entsprechende Zustandsvariable zum Zeitpunkt k. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 3)$$

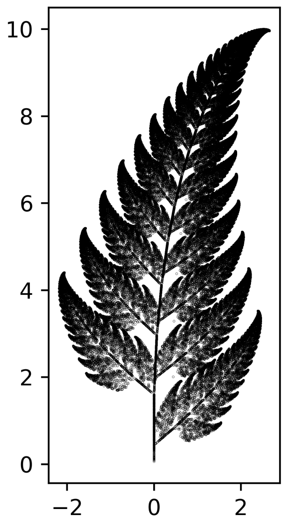
gegeben $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{8}$ und $\mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{3}{8}$. [2 Punkte]
Hinweis: Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_0 = 3)$, und verwenden Sie $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 2, X_0 = 3)\mathbb{P}(X_1 = 2, X_0 = 3)$ und $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_0 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 3)\mathbb{P}(X_0 = 3)$ zusammen mit der Markov-Eigenschaft angewendet auf $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 2, X_0 = 3)$. Setzen Sie nun die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten ein.

Aufgabe 18 (Farn-Fraktal)
"Recurrent Iterated Function Systems" sind Fraktal-Modelle, die durch iteratives Transformieren eines Punktes x entstehen, wobei in jedem Schritt eine von mehreren möglichen Transformationen zufällig ausgewählt wird. Wir betrachten im Folgenden affine Transformationen der Form

$$x \mapsto A_i\, x + b_i$$

mit $x \in \mathbb{R}^2$, $A_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b_i \in \mathbb{R}^2$ und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Das folgende Python-Programm generiert die nebenstehende Abbildung eines "Farn-Fraktals".




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A = np.array([
    [[ 0.85,  0.04], [-0.04, 0.85]],
    [[ 0.20, -0.26], [ 0.23, 0.22]],
    [[-0.15,  0.28], [ 0.26, 0.24]],
    [[ 0,     0   ], [ 0,    0.16]]])
b = np.array([
    [ 0, 1.6 ],
    [ 0, 1.6 ],
    [ 0, 0.44],
    [ 0, 0   ]])

prob = [0.85, 0.07, 0.07, 0.01]

x = np.array([0.5, 0.5])

npts = 100000
ptlist = np.zeros((2, npts))
for k in range(npts):
    i = np.random.choice(4, p=prob)
    x = np.dot(A[i], x) + b[i]
    ptlist[:, k] = x

plt.scatter(ptlist[0,:], ptlist[1,:], s=0.01, c='g')
plt.gca().set_aspect('equal')
```

(a) Erläutern Sie kurz die Funktionsweise des Programms. Wie wirkt sich eine Änderung des Eintrags 0.16 in der vierten A-Matrix auf das Bild aus? [2 Punkte]

(b) Visualisieren Sie die vier Trajektorien, die sich durch wiederholtes Anwenden nur einer der vier affinen Transformationen ergeben, jeweils mit Startpunkt $(-1, 5)$. Welche Transformation erzeugt also die Spitze des Farns? [2 Punkte]

(c) Bestimmen Sie nun die Koordinaten der Spitze durch Lösen der Fixpunktgleichung

$$x = A_i\, x + b_i$$

für die in (b) identifizierte i-te affine Transformation. [2 Punkte]