Image Inpainting als Navier-Stokes-Gleichung

Vorlesung Modellierung und Simulation I

Wintersemester 2017/2018

Christian B. Mendl

Technische Universität Dresden

7. Dezember 2017

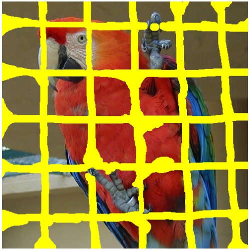
Motivation und Zielsetzung

(a) Original

(b) beschädigt

(c) rekonstruiert

(a) Original



(b) maskiert

(c) “rekonstruiert”

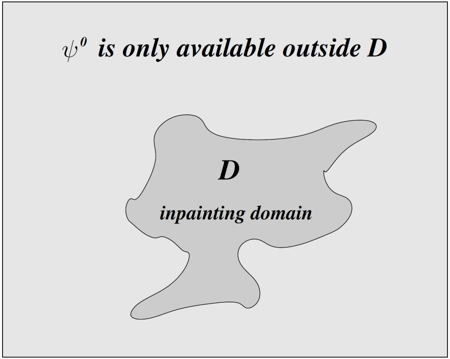
Bornemann und März, J. Math. Imaging Vis. (2007)

MATLAB/C++ Implementierung: https://github.com/maerztom/inpaintBCT

Notation

Kontinuum-Formulierung (Pixelgröße $\to 0$)

Ω	gesamter Bildbereich
$D \subset \Omega$	Rekonstruktionsbereich (manuell vorzugeben)
$\psi : \Omega \to [0,1]$	Bildfunktion (Grauwerte)



Formulierung als partielle Differentialgleichung

Idee (Bertalmio u. a. 2000, 2001): virtuelle Zeitevolution (innerhalb D):

$$\partial_t \psi = \vec{N} \cdot \nabla L$$

$\vec{N}$: Richtung, L: Information, die transportiert werden soll

Formulierung als partielle Differentialgleichung

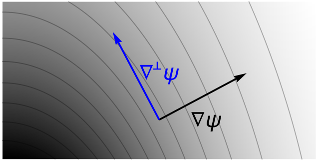
Idee (Bertalmio u. a. 2000, 2001): virtuelle Zeitevolution (innerhalb D):

$$\partial_t \psi = \vec{N} \cdot \nabla L$$

$\vec{N}$: Richtung, L: Information, die transportiert werden soll

Intuition: Transport entlang Konturlinien ("Isophoten"):

$$\vec{N} = \nabla^{\perp} \psi, \quad \nabla^{\perp} = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} \end{pmatrix}$$



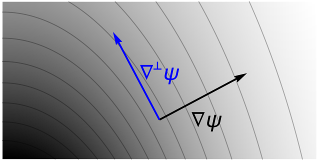
Formulierung als partielle Differentialgleichung

Idee (Bertalmio u. a. 2000, 2001): virtuelle Zeitevolution (innerhalb D):

$$\partial_t \psi = \vec{N} \cdot \nabla L$$

$\vec{N}$: Richtung, L: Information, die transportiert werden soll

Intuition: Transport entlang Konturlinien ("Isophoten"):



$$\vec{N} = \nabla^\perp \psi, \quad \nabla^\perp = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} \end{pmatrix}$$

Glatte Fortsetzung:
$L = \Delta \psi, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$

$$\partial_t \psi = \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \Delta \psi$$

Formulierung als partielle Differentialgleichung

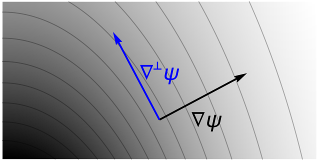
Idee (Bertalmio u. a. 2000, 2001): virtuelle Zeitevolution (innerhalb D):

$$\partial_t \psi = \vec{N} \cdot \nabla L$$

$\vec{N}$: Richtung, L: Information, die transportiert werden soll

Intuition: Transport entlang Konturlinien ("Isophoten"):

$$\vec{N} = \nabla^\perp \psi, \quad \nabla^\perp = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} \end{pmatrix}$$



Glatte Fortsetzung:
$L = \Delta \psi, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$

$$\partial_t \psi = \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \Delta \psi$$

Bemerkung: äquivalente Darstellung

$$\partial_t \psi + \vec{v} \cdot \nabla \psi = 0, \quad \vec{v} = \nabla^\perp \Delta \psi$$

ψ wird transportiert von $\vec{v}$: Richtung der Konturlinien von $\Delta \psi$

Image Inpainting $\leftrightarrow$ Navier-Stokes in 2D

Startpunkt: Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, divergenzfrei ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$)
Wirbelstärke:

$$\omega = \nabla \times \vec{u} := \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$$

Definiere $\vec{u}^\perp = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$, dann gilt somit $\nabla \times \vec{u}^\perp = -(\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) = 0$.

$\vec{u}^\perp$ ist wirbelfrei $\rightsquigarrow$ kann $\vec{u}^\perp$ als Gradient einer "Stromfunktion" ψ darstellen:

$$\vec{u}^\perp = \nabla \psi, \quad \text{bzw.} \quad \vec{u} = \nabla^\perp \psi.$$

Eingesetzt in die Wirbelstärke: $\omega = \Delta \psi$.

Navier-Stokes für inkompressible Fluide:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla P = \mu \, \Delta \vec{u}, \quad P : \text{Druck}, \quad \mu : \text{Viskosität}$$

Anwenden von $\nabla \times$:

$$\partial_t \omega + \vec{u} \cdot \nabla \omega = \mu \, \Delta \omega$$

Stationärer Fall $\partial_t \omega = 0$, ohne Viskosität (nur mittlerer Term):

$$0 = \vec{u} \cdot \nabla \omega = \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \Delta \psi,$$

gleich dem Image Inpainting Term. Konturlinien von ψ und ω zeigen in dieselbe Richtung.

Literaturverzeichnis

- Bertalmio, M. u. a. (2000). „Image inpainting". In: *SIGGRAPH '00: Proc. 27th Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques, New Orleans*.
- Bertalmio, M. u. a. (2001). „Navier-Stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting". In: *CVPR'01: Proc. IEEE Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. Bd. 1, S. 355–362.
- Bornemann, F. und März, T. (2007). „Fast image inpainting based on coherence transport". In: *J. Math. Imaging Vis.* 28, S. 259–278.
- Chan, T. F. und Shen, J. (2005). *Image Processing and Analysis*. SIAM, Philadelphia.