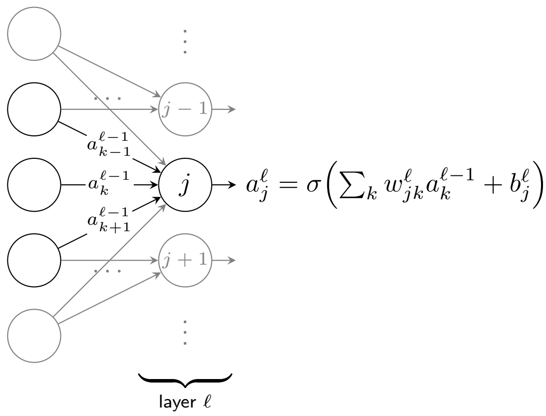
Tutoraufgabe (Backpropagation)
In einem Feedforward-künstlichen neuronalen Netz beträgt die Ausgabe der ℓ-ten Schicht

$$a^\ell = \sigma(z^\ell) \quad \text{mit} \quad z^\ell = w^\ell a^{\ell-1} + b^\ell,$$

wobei die "Aktivierungsfunktion" $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ komponentenweise auf die Einträge von z^ℓ angewendet wird und w^ℓ die sogenannte Gewichts-Matrix und b^ℓ den Bias-Vektor der ℓ-ten Schicht bezeichnet. Es sei außerdem eine reellwertige *Kostenfunktion* C vorgegeben, die lediglich von der Ausgabe der letzten Schicht L abhängt: $C(a^L)$. Der Backpropagation-Algorithmus erlaubt die effiziente Berechnung der Ableitungen der Kostenfunktion bezüglich w^ℓ und b^ℓ. Im Folgenden verwenden wir zur Herleitung noch die Hilfsgröße



$$\delta_j^\ell := \frac{\partial C}{\partial z_j^\ell}.$$

(a) Zeigen Sie durch Anwenden der Kettenregel:

$$\delta^L = \operatorname{diag}\big(\sigma'(z^L)\big) \cdot \nabla_{a^L} C, \tag{BP1}$$

wobei die Ableitung σ' komponentenweise an den Einträgen von z^L ausgewertet wird und $\operatorname{diag}(d)$ die Diagonalmatrix mit Diagonale d bezeichnet.

Lösungsvorschlag Laut Kettenregel gilt für alle j

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial z_j^L} = \sum_k \frac{\partial C}{\partial a_k^L} \frac{\partial a_k^L}{\partial z_j^L}$$

Da $a_k^L = \sigma(z_k^L)$ nur von z_k^L abhängt, bleibt in der Summe lediglich der Summand $k = j$ übrig. Man erhält also

$$\delta_j^L = \frac{\partial C}{\partial a_j^L} \sigma'(z_j^L).$$

Dies ist genau (BP1) in Komponentenform.

(b) Leiten Sie (wiederum durch Anwenden der Kettenregel) den Zusammenhang

$$\delta^\ell = \operatorname{diag}\big(\sigma'(z^\ell)\big) \cdot \big(w^{\ell+1}\big)^T \cdot \delta^{\ell+1} \tag{BP2}$$

für alle $\ell < L$ her.

Lösungsvorschlag Laut Kettenregel gilt

$$\delta_j^\ell = \frac{\partial C}{\partial z_j^\ell} = \sum_k \frac{\partial C}{\partial z_k^{\ell+1}} \frac{\partial z_k^{\ell+1}}{\partial z_j^\ell} = \sum_k \delta_k^{\ell+1} \frac{\partial z_k^{\ell+1}}{\partial z_j^\ell}.$$

Einsetzen der Definitionen ergibt

$$\frac{\partial z_k^{\ell+1}}{\partial z_j^\ell} = \frac{\partial}{\partial z_j^\ell} \left(\sum_m w_{km}^{\ell+1} \sigma(z_m^\ell) + b_k^{\ell+1} \right) = w_{kj}^{\ell+1} \sigma'(z_j^\ell)$$

und somit

$$\delta_j^\ell = \sum_k \delta_k^{\ell+1} w_{kj}^{\ell+1} \sigma'(z_j^\ell).$$

Dies ist (BP2) in Komponentenform.

(c) Verifizieren Sie schließlich

$$\frac{\partial C}{\partial b_j^\ell} = \delta_j^\ell \tag{BP3}$$

sowie

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^\ell} = a_k^{\ell-1}\delta_j^\ell. \tag{BP4}$$

Lösungsvorschlag Da b_j^ℓ nur via z_j^ℓ in das Netzwerk eingeht, gilt

$$\frac{\partial C}{\partial b_j^\ell} = \frac{\partial C}{\partial z_j^\ell}\frac{\partial z_j^\ell}{\partial b_j^\ell} = \delta_j^\ell \cdot 1.$$

Analog

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^\ell} = \frac{\partial C}{\partial z_j^\ell}\frac{\partial z_j^\ell}{\partial w_{jk}^\ell} = \delta_j^\ell a_k^{\ell-1}.$$