**Aufgabe 1** (Grundzüge von Python)
In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit den Grundzügen der Programmiersprache Python (www.python.org) vertraut machen. In der Vorlesung werden wir insbesondere die NumPy- und SciPy-Bibliotheken für numerische Funktionen sowie die Matplotlib-Bibliothek zur Visualisierung verwenden.

Hinweis: Geben Sie Ihre Lösungen schriftlich ab, also Programmiercode gegebenenfalls ausdrucken anstatt elektronisch per E-Mail oder ähnliches zu verschicken.

(a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `product(nums)`, die das Produkt der Zahlen in der Liste `nums` berechnet (ohne die NumPy-Funktion `numpy.prod` zu verwenden). Zum Beispiel soll also `product([3, 4, -1, 2.5])` den Wert `-30.0` zurückgeben. [2 Punkte]

(b) Wie lautet die Ausgabe des folgenden Python-Skripts? Wie speichert also NumPy Matrixeinträge ("row-major" oder "column-major")? [2 Punkte]

```
import numpy as np
a = np.array([1, -3, 2.5, 4, 7.1, 2])
b = a.reshape((2, 3))
print(b + 1)
```

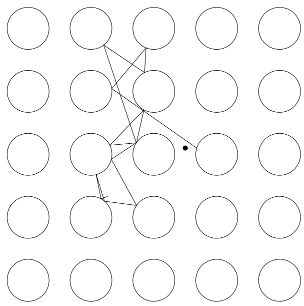
(c) Schreiben Sie ein Python-Programm, das die Funktion

$$f(x) = \sin(5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x^2}$$

auf dem Intervall $[0, 4\pi]$ mittels Matplotlib visualisiert. [2 Punkte]

**Aufgabe 2** (Pfad eines Lichtteilchens)
Die zweite Aufgabe der "SIAM 10×10 Digit Challenge"[1] lautet:

Ein Photon bewegt sich in der $x$-$y$ Ebene mit Geschwindigkeit 1. Zur Zeit $t = 0$ startet es von $(x, y) = (1/2, 1/10)$ aus in genau östliche Richtung. Um jeden ganzzahligen Gitterpunkt $(i, j)$ der Ebene ist ein kreisförmiger Spiegel vom Radius $1/3$ errichtet. Wie weit entfernt vom $(0, 0)$ befindet sich das Photon zur Zeit $t = 10$?



Eine (versteckte) Schwierigkeit der Aufgabe liegt darin, dass bei numerischer Rechnung die gewöhnliche Maschinengenauigkeit (d.h. "double precision" Gleitkomma-Zahlenformat bestehend aus 8 Byte, entspricht ungefähr 16 Dezimalstellen Genauigkeit) nicht ausreicht. Anders ausgedrückt: der berechnete Pfad ist sehr sensitiv auf kleine Störungen bzw. Ungenauigkeiten, so dass man nach mehreren Reflexionen nur aufgrund der numerischen Rundungsfehler eine falsche Trajektorie erhält. Eine naheliegende Lösung ist der Einsatz von "arbitrary precision arithmetic", die in vielen Programmiersprachen als Zusatzmodul zur Verfügung steht oder schon eingebaut ist. In dieser Aufgabe soll die Problematik allerdings nicht weiter thematisiert werden.

[1] siehe auch www.numerikstreifzug.de

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Schnitts einer Geraden der Form $\vec{p} + t\vec{v}$ mit einem Kreis mit Mittelpunkt $\vec{m}$ und Radius $r$ auf. [2 Punkte]

(b) Wie lautet der neue Richtungsvektor $\vec{v}'$ nach Reflexion an einer Oberfläche (d.h. in zwei Dimensionen an einer Geraden) mit Normale $\vec{n}$? [2 Punkte]

(c) Berechnen Sie (numerisch oder symbolisch) die Position des Photons zum Zeitpunkt $t = 1/2$. [2 Punkte]
Hinweis: Bis zu $t = 1/2$ wurde das Photon einmal an dem Spiegel um den Gitterpunkt $(1, 0)$ reflektiert.

(d) Freiwillige Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie die Lösung der obigen SIAM-Aufgabe.

**Tutoraufgabe 1** (Fallender Regentropfen)
Ein kugelförmiger Tropfen Wasser mit Masse $m$, Radius $r$ sowie konstanter Dichte $\rho_W$ fällt (unter dem Einfluss des Gravitationsfelds $g$) durch eine bewegungslose Nebelwolke mit gleichförmiger Dichte $\rho_N$. Hierbei sammelt der Tropfen die Feuchtigkeit in der Wolke auf, seine Masse und sein Radius nehmen also zu. Bezeichne die (in Richtung Boden) zurückgelegte Strecke mit $z(t)$, und die Geschwindigkeit[2] des Tropfens mit $v = \dot{z}$. Wir können annehmen, dass anfangs $z(0) = 0$ und $v(0) = 0$, d.h. der Tropfen startet in Ruhe.

(a) Stellen Sie eine Gleichung für $\dot{m}$ auf, also die zeitliche Änderung der Masse des Regentropfens. Leiten Sie die Beziehung

$$\dot{v} = g - \frac{3}{4} \frac{\rho_N}{\rho_W} \frac{v^2}{r}$$

für die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit her.
Hinweis: Betrachten Sie für $\dot{m}$ das vom Tropfen pro Zeit überstrichene Volumen; für $\dot{v}$ empfiehlt sich Newton's zweites Gesetz: zeitliche Änderung des Impulses ist gleich Gravitationskraft $mg$, die auf den Tropfen wirkt.

(b) Verwenden Sie die Beziehung zwischen $r$ und $m$, um zu zeigen, dass $r$ linear von $z$ abhängt, d.h. $r(t) = \alpha z(t) + r_0$ mit Anfangsradius $r_0$. Wie lautet die Proportionalitätskonstante $\alpha$?

(c) Zeigen Sie für den Fall $r_0 = 0$, dass

$$z(t) = \frac{1}{2} \frac{g}{7} t^2,$$

d.h. der Regentropfen unterliegt einem effektiven Gravitationsfeld $\frac{g}{7}$!

(d) Der typische Durchmesser einer Regenwolke beträgt $2\,\mathrm{km}$, und die relevanten Dichten sind $\rho_W \approx 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ sowie $\rho_N \approx 10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}$. Schätzen Sie hiermit die Größe des Tropfens nach Durchqueren der Wolke ab, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem empirischen Wert $\approx 1\,\mathrm{mm}$.

[2] Physiker verwenden oft einen hochgestellten Punkt für die zeitliche Ableitung.