Modellierung und Simulation I **Übungsblatt 3**

Jun.-Prof. Dr. Christian Mendl Abgabe: 22. November 2018

Aufgabe 5 (Dimensionsanalyse, Entdimensionalisierung und Skalierung)
Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) - D\partial_x^2 u(x,t) + v\partial_x u(x,t) + \alpha u(x,t) = 0$$

für die Konzentration $u(x,t)$ (z.B. einer chemischen Substanz), wobei der zweite Term die Diffusion mit Diffusionkonstante D, der dritte Term die Konvektion mit Geschwindigkeit v und der vierte Term den Abbau mit Rate α beschreibt.

(a) Leiten Sie ausgehend von $[x] = \mathsf{L}$, $[t] = \mathsf{T}$ und $[u] = \mathsf{L}^{-1}$ die Dimensionen der drei Parameter D, v und α ab. [2 Punkte]

(b) Wie müssen charakteristische Größen x_0, t_0 und u_0 mit $x = x_0\hat{x}$, $t = t_0\hat{t}$, $u = u_0\hat{u}$ (und dimensionslosen $\hat{x}$, $\hat{t}$, $\hat{u}$) gewählt werden, um die Differentialgleichung auf die Form

$$\partial_{\hat{t}}\hat{u}(\hat{x},\hat{t}) - \hat{D}\partial_{\hat{x}}^2\hat{u}(\hat{x},\hat{t}) + \partial_{\hat{x}}\hat{u}(\hat{x},\hat{t}) + \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) = 0$$

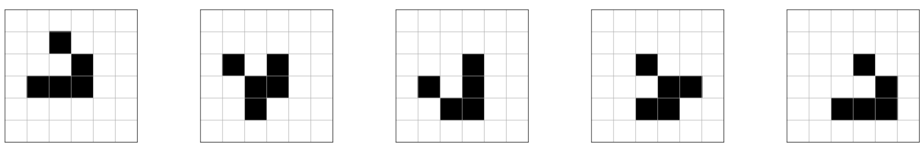
zu transformieren? Wie lautet der verbleibende Parameter $\hat{D}$? [2 Punkte]

(c) Es seien zusätzlich die Anfangs- und Randbedingungen $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le \ell$ und $u(0,t) = g(t)$, $0 \le t \le \tau$ vorgegeben. Wie transformieren sich die ursprünglichen Parameter D, v und α sowie die Funktionen f und g, wenn Sie die Definitionsbereiche $x \in [0,\ell]$ und $t \in [0,\tau]$ auf das Intervall $[0,1]$ skalieren? [2 Punkte]

Aufgabe 6 (Zelluläre Automaten und Conway's "Game of Life")
Zelluläre Automaten sind diskrete Modelle eines räumlichen Prozesses und bestehen aus einem regulären Gitter von Zellen, die jeweils nur endlich viele Zustände annehmen können. Eines der ersten und bekanntesten Beispiele ist Conway's "Game of Life" von 1970, das man sich als abstraktes Modell für die Ausbreitung eines Organismus (z.B. Bakteriumwachstum) vorstellen kann. Jede Zelle eines zweidimensionalen Gitters befindet sich entweder im Zustand 0 oder 1, wobei 1 als "besetzt" bzw. "lebend" und 0 als "leer" bzw. "ausgestorben" interpretiert wird. Die Nachbarschaft einer Zelle besteht aus den 8 direkt angrenzenden Zellen. Die Regeln für den Übergang zum nächsten Zeitschritt (simultan für alle Zellen) lauten:

1. Überleben: jede besetzte Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
2. Aussterben: jede Zelle mit vier oder mehr bzw. einem oder keinem lebenden Nachbarn stirbt aus (Überpopulation bzw. Isolation).
3. Wachstum: Jede leere Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird zu einer lebenden Zelle.

Das folgende Beispiel zeigt einen "Glider", der sich alle 4 Zeitschritte nach rechts unten bewegt:



(a) Beschreiben Sie kurz die Funktionsweise des folgenden Python-Codes zur Simulation eines Zeitschritts, wobei `P` eine NumPy-Matrix mit Einträgen vom Typ `int` ist:

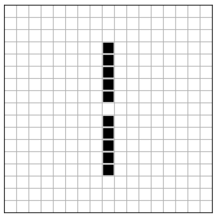
```
import numpy as np

def game_of_life_step(P):
    neighs = np.zeros(P.shape, dtype=int)
    for shift in [(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1), (-1,-1), (1,1), (-1,1), (1,-1)]:
        neighs += np.roll(P, shift, axis=(0,1))

    return 1 * np.logical_or(np.logical_and(P==1, neighs==2), neighs==3)
```

[2 Punkte]

(b) Bestimmen Sie die zeitliche Sequenz des rechts abgebildeten Musters, und visualisieren Sie das Muster nach 25 Zeitschritten. Was fällt Ihnen bezüglich Periodizität auf? [2 Punkte]



Hinweis: Zum Initialisieren der Populationsmatrix können Sie zunächst eine "leere" Matrix mit `P = np.zeros((17, 17), dtype=int)` erstellen und dann die besetzten Zellen auf 1 setzen, etwa `P[3, 8] = 1`, usw. Zum Visualisieren der Matrixeinträge eignet sich die Funktion `matplotlib.pyplot.spy`.

(c) Die oben beschriebenen Originalregeln werden kompakt mit B3/S23 zusammengefasst: eine leere Zelle mit genau 3 Nachbarn wird besetzt (**B**orn), und eine besetzte Zelle mit 2 oder 3 Nachbarn überlebt (**S**urvives), andernfalls stirbt die Zelle aus. Modifizieren Sie die obige Python-Funktion, so dass die "Highlife" Regel B36/S23 implementiert wird, und bestimmen Sie die entsprechende zeitliche Sequenz des Musters in (b). Ab welchem Zeitschritt weicht die Sequenz im Vergleich zu den Originalregeln ab, und welche Periodizität tritt nun auf? [2 Punkte]

(d) Freiwillige Zusatzaufgabe: Implementieren Sie den zelluläre Automaten für hexagonale Gitter.

Tutoraufgabe 3 (Dimensionsanalyse und Entdimensionalisierung)

Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) sind unabhängig voneinander.

(a) Ein Feuerwerkskörper bilde bei der Explosion eine kugelförmige Blase mit zeitabhängigem Radius R aus. Leiten Sie eine Relation zwischen dem Radius R, der vergangenen Zeit t, der Dichte ρ der umgebenden Luft und der freigesetzten Energie E her, wenn Sie annehmen, dass keine weiteren Größen in die Relation eingehen ($[\rho] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}$, $[E] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{2}\,\mathsf{T}^{-2}$).

(b) Wir betrachten folgende Differentialgleichung für $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, wobei α, β und γ positive Konstanten sind:

$$u''(x) + \frac{\alpha}{(\gamma + x)\sqrt{\beta^2 + (u'(x))^2}}\, u(x)^3 = 0.$$

Wie müssen charakteristische Konstanten x_0 und u_0 für $\hat{x} = \frac{x}{x_0}$ und $\hat{u} = \frac{u}{u_0}$ gewählt werden, um die Differentialgleichung auf die Form

$$\hat{u}''(\hat{x}) + \frac{1}{(1 + \hat{x})\sqrt{1 + \lambda(\hat{u}'(\hat{x}))^2}}\, \hat{u}(\hat{x})^3 = 0$$

zu transformieren (wobei $\hat{u}'$ bzw. $\hat{u}''$ die erste und zweite Ableitung bezüglich $\hat{x}$ bezeichnet)? Wie lautet der verbleibende Parameter λ?