Aufgabe 13 (Google's PageRank)
Ausgehend von der Hyperlink-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dem Parameter α $(0 < \alpha < 1)$ und der "Teleportations"-Wahrscheinlichkeitsverteilung $v \in \mathbb{R}^n$ $(v_i > 0\ \forall i,\ \sum_i v_i = 1)$ ergibt sich laut Vorlesung die Google-Matrix

$$G = \alpha\big(H + \tfrac{1}{n} d e^T\big) + (1-\alpha) e v^T.$$

Hierbei ist $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ und $d \in \mathbb{R}^n$ der Nullzeilen-Indikator von H: $d_i = 1$, falls die i-te Zeile von H nur aus Nullen besteht (d.h. die i-te Webseite besitzt keine Links), ansonsten $d_i = 0$.

(a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `apply_google_matrix(H, alpha, v, x)`, die einen Schritt der PageRank-Vektoriteration ausführt, d.h. $G^T x$ für den Eingabevektor $x \in \mathbb{R}^n$ berechnet, *ohne G explizit aufzustellen*. (Der Einfachheit halber speichern wir H als gewöhnliche NumPy-Matrix; für große n würde man H in einem sparse matrix-Format repräsentieren.) [2 Punkte]
Hinweis: Das Skalarprodukt $a \cdot b \equiv a^T b \equiv \sum_i a_i b_i$ zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ lässt sich mittels `np.dot(a, b)` berechnen, und das Matrix-Vektor-Produkt $H^T x$ mittels `np.dot(H.T, x)`.

(b) Wenden Sie nun Ihr Programm auf das Beispiel aus der Vorlesung mit

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \tfrac{4}{5}, \quad v = \tfrac{1}{6} e$$

an: führen Sie 50 Schritte der Vektoriteration $\pi^{k+1} = G^T \pi^k$, $k = 0, 1, \dots$ mit Startvektor $\pi^0 = \frac{1}{6} e$ durch. Plotten Sie die Abweichung $\|\pi^k - \pi\|_1$ als Funktion von k auf einer logarithmischen Skala, wobei $\pi = (\frac{13403}{66978}, \frac{13963}{66978}, \frac{14663}{66978}, \frac{19}{122}, \frac{35}{366}, \frac{133}{1098})^T$ die exakte Lösung von $G^T \pi = \pi$ bezeichnet, und zeichnen Sie zum Vergleich auch die theoretische Abschätzung $2\alpha^k$ ein. [2 Punkte]
Hinweis: `np.linalg.norm(x, 1)` liefert die 1-Norm eines Vektors x.

(c) Auf der Webseite zur Vorlesung[1] findet sich eine einfache Implementierung eines "web crawler" (Syntax `urls, H = web_crawler(root_url, n)`), der ausgehend von einer Start-Internetadresse `root_url` rekursiv bis zu `n` Links folgt und die entsprechende Hyperlink-Matrix aufstellt. Lassen Sie das Programm mit Startadresse `'https://tu-dresden.de'` (oder einer Adresse Ihrer Wahl) und $n = 100$ laufen, und bestimmen Sie (analog zu (b) mit $\alpha = \frac{4}{5}$, $v = \frac{1}{n} e$) den PageRank-Vektor durch Vektoriteration. Welche Adresse in `urls` hat den höchsten PageRank? [2 Punkte]

[1] https://tu-dresden.de/mn/math/wir/mendl/studium/courses/mosim_2018_wise

Aufgabe 14 (Eigenfunktionen des Laplace-Operators)
Wir untersuchen das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega = [0,1]^2, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ der Laplace-Operator in zwei Dimensionen ist.

(a) Zeigen Sie: Für alle $k, \ell \in \{1, 2, \dots\}$ ist $u^{k\ell}(x, y) = \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi y)$ eine Eigenlösung. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte $\lambda^{k\ell}$. [2 Punkte]
Hinweis: Insbesondere muss $u^{k\ell}(x, y)$ die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllen.

(b) Verifizieren Sie die folgende Beziehung (für beliebiges $h > 0$):

$$\frac{-\sin(k\pi(x+h)) + 2\sin(k\pi x) - \sin(k\pi(x-h))}{h^2} = \frac{2(1-\cos(k\pi h))}{h^2}\sin(k\pi x).$$

(Somit ist $\sin(k\pi\cdot)$ auch exakte Eigenfunktion des finiten Differenzenoperators von ∂_x^2.)
[2 Punkte]

(c) Es sei $\Omega_h = \{(x, y) \in \Omega \,|\, x = ih, y = jh, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ mit $h = \frac{1}{n}$ ein uniformes Rechtecksgitter auf Ω. Durch den Fünf-Punkte-Stern

$$-\Delta_h := \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

ist auf Ω_h ein Differenzenoperator (entsprechend dem negativen Laplace-Operator) gegeben, d.h.

$$-\Delta_h u(x,y) = \frac{4u(x,y) - u(x+h,y) - u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{h^2}.$$

Zeigen Sie mittels (b), dass $u^{k\ell}|_{\Omega_h}$ Eigenfunktionen dieses Operators sind. Werden die kleinen oder großen Eigenwerte $\lambda^{k\ell}$ besser approximiert? [2 Punkte]

Tutoraufgabe 7 (Finite-Differenzen-Diskretisierung der Poisson-Gleichung)
Wir verwenden zur Diskretisierung des Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = [0,1]^2, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

ein uniformes Rechtecksgitter Ω_h (siehe Aufgabe 14c) zusammen mit dem Fünf-Punkte-Stern.

(a) Schreiben Sie für vorgegebenes $h = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Python-Funktion, die $-\Delta_h$ als Matrix (angewendet auf $u|_{\Omega_h}$) mit Dirichlet-Randbedingungen aufstellt.

(b) Lösen Sie hiermit das diskretisierte Problem für $h = \frac{1}{64}$ und visualisieren Sie die Lösung.

(c) Ermitteln Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens (bezüglich h) experimentell.