Name, Vorname:

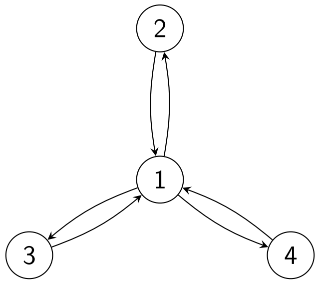
Matrikelnummer:

Hinweise:

- Die vorgesehene Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf das Aufgabenblatt und jedes Lösungsblatt.
- Als Hilfsmittel ist lediglich ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt mit persönlichen Notizen zugelassen.
- Die maximal zu erreichenden Punkte sind für alle Aufgaben gleich.
- Zur Abgabe falten Sie die Aufgabenblätter in der Mitte und legen Ihre Lösungszettel hinein.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	12	12	12	12	12	60

Aufgabe 1 (Google's PageRank)
Wir untersuchen die Hyperlink-Struktur des folgenden Modell-Internets:



(a) Stellen Sie die entsprechende Hyperlink-Matrix H auf.

Lösung

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 Punkte]

(b) Der Eigenwert 1 von H^T ist algebraisch einfach, was als bekannt vorausgesetzt werden kann. Berechnen Sie einen entsprechenden (bezüglich L^1-Norm normierten) Eigenvektor r von H^T, also $H^T r = r$.
Hinweis: Aus Symmetriegründen eignet sich der Ansatz $r = (x, y, y, y)^T$ mit noch zu bestimmenden Werten $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung Einsetzen von $r = (x, y, y, y)^T$ in $H^T r = r$ liefert $3y = x$, also $r = (x, \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x)^T$ und somit $\|r\|_1 = 2|x|$. Die Normierungsbedingung $\|r\|_1 = 1$ führt auf $x = \pm\frac{1}{2}$; wir wählen im Folgenden $x = \frac{1}{2}$. Insgesamt erhält man $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})^T$.

[3 Punkte für Berechnung eines Eigenvektors und 1 Punkt für korrekte Normierung]

(c) Wie lässt sich der berechnete Eintrag r_1 (also der Wert x) aus Sicht eines Zufalls-Surfers rechtfertigen?

Lösung Aufgrund der speziellen Link-Struktur landet ein Zufalls-Surfer abwechselnd auf der Webseite 1 und einer der Webseiten 2, 3, 4. Er befindet sich somit die Hälfte der Zeit auf der Webseite 1, d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für Webseite 1 beträgt $\frac{1}{2}$.

[2 Punkte]

(d) Anhand der Google-Matrix

$$G = \alpha H + (1-\alpha)\tfrac{1}{4}ee^T$$

mit $e = (1,1,1,1)^T$ lassen sich PageRank-Vektoren π für verschiedene Werte von α berechnen, mit folgenden Ergebnissen für den Eintrag π_1 (also den PageRank der Webseite 1):

$$\text{(i)}\ \ \pi_1 = \frac{1}{2}, \qquad \text{(ii)}\ \ \pi_1 = \frac{1}{4}, \qquad \text{(iii)}\ \ \pi_1 = \frac{5}{12}.$$

Ordnen Sie die drei Fälle den Werten $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ zu, und begründen Sie Ihre Zuordnung kurz (Stichpunkte genügen).

Lösung

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ \ \pi_1 &= \frac{1}{2} &\quad\leftrightarrow\quad& \alpha = 1 \\ \text{(ii)}\ \ \pi_1 &= \frac{1}{4} &\quad\leftrightarrow\quad& \alpha = 0 \\ \text{(iii)}\ \ \pi_1 &= \frac{5}{12} &\quad\leftrightarrow\quad& \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ ist $G = H$ und somit der PageRank-Vektor π gleich dem in (b) berechneten Vektor r. Dies ergibt die Zuordnung (i).

Im Fall $\alpha = 0$ spielt die Link-Struktur für π gar keine Rolle, der Google-Zufalls-Surfer springt in jedem Schritt zufällig (gleichverteilt) auf eine der vier Webseiten; jede Webseite hat somit PageRank $\frac{1}{4}$, was dem Fall (ii) entspricht.

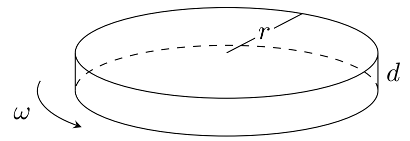
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ bleibt nur noch der Fall (iii) übrig.

[2 Punkte für korrekte Zuordnung und 2 Punkte für Begründung (aus der die Zuordnung eindeutig hervorgehen sollte)]

Aufgabe 2 (Dimensionsanalyse und Entdimensionalisierung)

Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) sind unabhängig voneinander.

(a) Wir untersuchen eine rotierende Scheibe mit Radius r, Dicke d und Materialdichte ρ. Die Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω führt zu einer mechanischen Spannung σ. ($[\rho] = \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{L}^3}$, $[\omega] = \frac{1}{\mathsf{T}}$, $[\sigma] = \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{L}\,\mathsf{T}^2}$)



(i) Auf wie viele dimensionslose Größen kann eine Modellgleichung für r, d, ρ, ω und σ zurückgeführt werden? Bestimmen Sie solche dimensionslosen Größen.

Lösung Es treten drei unabhängige Dimensionen (Länge L, Zeit T und Masse M) auf. Laut Buckinghamschem Π-Theorem lässt sich somit jede Modellgleichung $f(r,d,\rho,\omega,\sigma) = 0$ auf die Form $\hat{f}(q_1,q_2) = 0$ umschreiben, wobei sich die zwei $(= 5-3)$ dimensionslosen Größen q_1 und q_2 aus Produkten der ursprünglichen Variablen in der Form

$$r^{\alpha_1} d^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3} \omega^{\alpha_4} \sigma^{\alpha_5} \tag{1}$$

zusammensetzen. Aufstellen der S-Matrix liefert:

	r	d	ρ	ω	σ
L	1	1	-3	0	-1
T	0	0	0	-1	-2
M	0	0	1	0	1

Die Exponenten α in Gl. (1) müssen also $S\alpha = 0$ erfüllen; zwei linear unabhängige Lösungen sind $\alpha^{(1)} = (-1,1,0,0,0)$ und $\alpha^{(2)} = (2,0,1,2,-1)$, entsprechend

$$q_1 = \frac{d}{r}, \qquad q_2 = \frac{\rho r^2 \omega^2}{\sigma}.$$

[1 Punkt für Anzahl dimensionsloser Größen, 1 Punkt für Aufstellen der S-Matrix, 2 Punkte für Berechnung der Lösungen $\alpha^{(i)}$ und Angabe der dimensionslosen Größen]

(ii) Wir vergleichen zwei rotierende Scheiben, wobei die zweite im Vergleich zur ersten eine halb so große Dicke, fünffache Materialdichte und eine um $\frac{2}{3}$ skalierte Rotationsgeschwindigkeit besitze. Für welchen Radius und welche mechanische Spannung (relativ zur ersten Scheibe) erfüllt die zweite Scheibe eine gegebene Modellgleichung für r, d, ρ, ω und σ, falls die erste Scheibe dieser Gleichung folgt?

Lösung Laut (i) lässt sich die Modellgleichung auf $\hat{f}(q_1, q_2) = 0$ umschreiben; die zweite Scheibe erfüllt also sicher ebenfalls diese Gleichung, falls q_1 und q_2 für beide Scheiben übereinstimmen. Im Folgenden bezeichnen wir die Parameter der zweiten Scheibe mit r', d', ... Aus $q_1 = q_1'$, d.h. $\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}$, folgt direkt $r' = \frac{1}{2}r$. Einsetzen in q_2' führt auf

$$q_2' = \frac{\rho' r'^2 \omega'^2}{\sigma'} = \frac{(5\rho)\left(\frac{1}{2}r\right)^2\left(\frac{2}{3}\omega\right)^2}{\sigma'} = \frac{5}{9}\frac{\sigma}{\sigma'}\frac{\rho r^2\omega^2}{\sigma} = \frac{5}{9}\frac{\sigma}{\sigma'}q_2,$$

also $\sigma' = \frac{5}{9}\sigma$.
[2 Punkte]

(b) Gegeben sei folgende Differentialgleichung für $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei α, β und γ positive Koeffizienten sind:

$$\frac{u''(x)}{\sqrt{\beta^2 + (u'(x))^2}} + \frac{\alpha}{xu(x)} = \gamma x.$$

Wie müssen charakteristische Konstanten x_0 und u_0 für $\hat{x} = \frac{x}{x_0}$ und $\hat{u} = \frac{u}{u_0}$ gewählt werden, um die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{\hat{u}''(\hat{x})}{\sqrt{1 + (\hat{u}'(\hat{x}))^2}} + \frac{1}{\hat{x}\hat{u}(\hat{x})} = \lambda\hat{x}$$

zu transformieren (wobei $\hat{u}'$ bzw. $\hat{u}''$ die erste und zweite Ableitung bezüglich $\hat{x}$ bezeichnet)? Wie lautet der verbleibende Parameter λ?

Lösung Wir berechnen zunächst die Ableitungen bezüglich der transformierten Größe $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}\hat{u}(\hat{x}) &= \frac{1}{u_0}u(x_0\hat{x}),\\ \hat{u}'(\hat{x}) &= \frac{x_0}{u_0}u'(x_0\hat{x}),\\ \hat{u}''(\hat{x}) &= \frac{x_0^2}{u_0}u''(x_0\hat{x}).\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\frac{\frac{u_0}{x_0^2}\hat{u}''(\hat{x})}{\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{u_0}{x_0}\hat{u}'(\hat{x})\right)^2}} + \frac{\alpha}{x_0\hat{x}\, u_0\hat{u}(\hat{x})} = \gamma\, x_0\hat{x}, \tag{2}$$

und Multiplikation mit $\frac{\beta x_0^2}{u_0}$ führt auf

$$\frac{\hat{u}''(\hat{x})}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_0}{\beta x_0}\hat{u}'(\hat{x})\right)^2}} + \frac{\alpha\beta x_0}{u_0^2}\frac{1}{\hat{x}\hat{u}(\hat{x})} = \frac{\beta\gamma x_0^3}{u_0}\hat{x}.$$

Es lassen sich also drei Π-Faktoren identifizieren:

$$\Pi_1 = \frac{u_0}{\beta x_0}, \qquad \Pi_2 = \frac{\alpha\beta x_0}{u_0^2}, \qquad \Pi_3 = \frac{\beta\gamma x_0^3}{u_0}.$$

Laut Angabe soll $\Pi_1 = 1$ und $\Pi_2 = 1$ gelten, was durch Wahl von

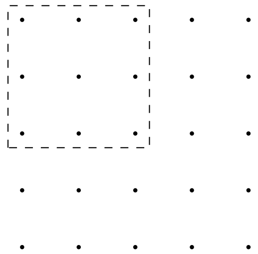
$$x_0 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad u_0 = \alpha \tag{3}$$

erreicht wird. Einsetzen in Π_3 liefert schließlich

$$\lambda = \Pi_3 = \frac{\alpha^2\gamma}{\beta^2}. \tag{4}$$

[2 Punkte für Aufstellen von Gl. (2), 2 Punkte für Berechnung von x_0 und u_0 in Gl. (3), 2 Punkte für Berechnung von λ in Gl. (4)]

Aufgabe 3 (Convolutional Layer in zwei Dimensionen)



Wir betrachten eine 2D convolutional layer mit Eingabe $x \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, filter-kernel $w \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, ReLU-Aktivierungsfunktion und entsprechender Ausgabematrix a. Die mini-batch-, channel- und feature-Dimensionen seien auf 1 gesetzt und brauchen nicht weiter berücksichtigt werden; auch der bias-Vektor wird zur Vereinfachung weggelassen. Der zero-padding-Parameter werde mit P bezeichnet und die stride-length mit S.

(a) Bestimmen Sie die Dimension der Ausgabematrix a für die drei Fälle

$$\text{(i) } P = 0,\ S = 2, \qquad \text{(ii) } P = 1,\ S = 1, \qquad \text{(iii) } P = 0,\ S = 1.$$

Lösung Aus der Vorlesung ist folgende Formel für die Ausgabedimension M (entlang einer Richtung) bekannt:

$$M = \frac{1}{S}(N + 2P - R) + 1,$$

wobei R die Breite bzw. Höhe des Filters bezeichnet, hier also $R = 3$. Einsetzen ergibt

$$\text{(i) } M = 2, \qquad \text{(ii) } M = 5, \qquad \text{(iii) } M = 3.$$

Die Ausgabe hat jeweils Dimension $\mathbb{R}^{M\times M}$.

[2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die Einträge von a im Fall (iii) für

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: vergessen Sie die Aktivierungsfunktion nicht.

Lösung Die Operation der convolutional layer mit Aktivierungsfunktion σ lautet:

$$a_j = \sigma(z_j), \quad z_j = \sum_k w_k\, x_{j+k} + b,$$

wobei j und k zweidimensionale Indizes sind und hier $b = 0$. Einsetzen liefert zunächst

$$z = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die ReLU-Aktivierungsfunktion setzt alle negativen Einträge auf 0, so dass

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[4 Punkte]

(c) Es sei C eine von a abhängige Kostenfunktion. Für Eingabe und Parameter wie in (b) nehme die Ableitung von C folgende Werte an:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie hieraus den Gradienten bezüglich der Eingabe x, also die Einträge von $\partial C/\partial x$.

Lösung Für den Gradienten der Kostenfunktion bezüglich z selektiert man genau die Einträge von $\partial C/\partial a$, für die der entsprechende Eintrag in z nicht-negativ ist (da ansonsten die Ableitung der ReLU-Funktion gleich Null ist), also

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anschließend kann man folgende Zeile im Pseudo-Code für die Backpropagation verwenden:

$$\mathit{dx}[i : i + \mathit{width}, j : j + \mathit{height}] \leftarrow \mathit{dx}[i : i + \mathit{width}, j : j + \mathit{height}] + \mathit{dz}[i, j] * w.$$

Dies führt auf

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[4 Punkte]

(d) Geben Sie einen filter-kernel $w \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass im Fall (iii)

$$\text{für Eingabe } x = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{die Ausgabe } a = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

herauskommt.

Lösung Man beobachtet folgenden quadratischen Zusammenhang für die Einträge von x:

$$x_{ij} = (i-2)^2 + (j-2)^2, \quad i, j = 0, \ldots, 4.$$

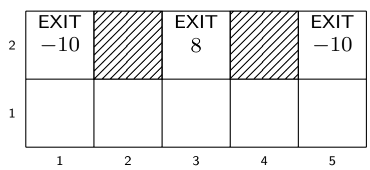
x lässt sich also als Diskretisierung der quadratischen Abbildung $f(u,v) = u^2 + v^2$ interpretieren. Anwendung des Laplace-Operators liefert $(\partial_u^2 + \partial_v^2) f(u,v) = 4$; somit liegt es nahe, für w den (negativen) Fünf-Punkte-Stern zu wählen:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen bestätigt die gewünschte Eigenschaft.

[2 Punkte]

Aufgabe 4 (Markov Decision Process)



Wir betrachten das folgende Modell für einen Markov Decision Process $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, R, \mathbb{P}, \gamma)$: Der Zustandsraum $\mathcal{S}$ besteht aus den Feldern des gezeigten 5×2 Spielfelds, mit Ausnahme der nicht betretbaren schraffierten Felder, sowie einem "game over"-Zustand. In diesen geht der Prozess nach Betreten der Exit-Felder über. Die Menge der Aktionen in jedem Zustand besteht aus den vier Richtungen "oben", "unten", "links", "rechts", dargestellt als $\mathcal{A} = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$.

Die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(s_{t+1}|s_t, a_t)$ zum nächsten Zustand s_{t+1} sei deterministisch, d.h. der Agent bewegt sich sicher in die gewählte Pfeilrichtung auf das benachbarte Feld (bzw. verbleibt auf dem aktuellen Feld, falls er auf ein unzulässiges Feld ziehen würde).

Lediglich das Erreichen der Exit-Felder wird belohnt bzw. bestraft; somit ist die Reward-Funktion $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$R(s) = \begin{cases} 8 & s = (3,2) \\ -10 & s = (1,2) \text{ oder } (5,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der discount factor beträgt $\gamma = \frac{1}{2}$.

(a) Wie viele Iterationen benötigt der *Value-Iteration*-Algorithmus bis zur Konvergenz für Startfunktion $U_0 = R$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Lösung Der Value-Iteration-Algorithmus mit der angegebenen Startfunktion benötigt 3 Iterationen, entsprechend dem längsten optimalen Pfad (von Startfeld (1,1) bzw. (5,1)) bis zum mittleren Exit-Feld mit positiver Belohnung. Aufgrund der deterministischen policy wird in jedem Iterationsschritt die Menge der Felder mit korrekter (optimaler) Bewertung um die direkt angrenzenden Felder erweitert.

[2 Punkte]

(b) Gegeben sei folgende Bewertungsfunktion $\tilde{U}$:

EXIT -10		EXIT 8		EXIT -10
3	4	6	5	7

sowie $\tilde{U}(\text{game over}) = 0$. Bestimmen Sie hieraus die entsprechende policy π, gemäß der policy-Verbesserung innerhalb des *Policy-Iteration*-Algorithmus.

Lösung

$$\pi(s) = \underset{a \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmax}} \sum_{s'} \mathbb{P}(s'|s,a)\tilde{U}(s') \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

Aufgrund der deterministischen Übergangsfunktion ist die Aktion a so zu wählen, dass man im nächsten Schritt auf das (direkt angrenzende oder gleiche) Feld mit der höchsten Bewertung gelangt. Dies führt auf

EXIT -10		EXIT 8		EXIT -10
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

(Im Feld (5,1) kann der Pfeil alternativ auch nach unten zeigen.)

[2 Punkte; $\frac{1}{2}$ Punkt Abzug für Fehler in Feld (5,1)]

(c) Berechnen Sie nun U^π durch Auswertung der policy π aus (b), so dass

$$U^\pi(s) = R(s) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s'|s,\pi(s))\, U^\pi(s') \quad \forall s \in \mathcal{S} \tag{1}$$

(d.h. die nächste Bewertungsfunktion im Policy-Iteration-Algorithmus).

Lösung Auf den Exit-Feldern ist die Bewertungsfunktion gleich dem entsprechenden reward, da das Spiel im nächsten Schritt endet (den "game over"-Zustand erreicht). Gemäß π gelangt man von den Feldern (3,1), (2,1) und (1,1) auf kürzestem Weg zum mittleren Exit-Feld (3,2); unter Berücksichtigung des discount factors γ ergeben sich hieraus die entsprechenden Bewertungen 4, 2 und 1. Für die Felder (4,1) und (5,1) als Startpunkt hingegen verbleibt der Spieler "ewig" auf (5,1); da die Reward-Funktion auf regulären Feldern stets 0 ist, ist die Bewertung in diesem Fall ebenfalls 0. Zusammenfassend ergibt sich für U^π:

EXIT -10		EXIT 8		EXIT -10
1	2	4	0	0

Alternativer Ansatz: Lösung des linearen Gleichungssystems in Gl. (1):

$$U^\pi = R + \gamma P^T U^\pi, \quad (I - \gamma P^T)U^\pi = R$$

mit $R = (0,0,0,0,0,-10,8,-10,0)$ und

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(für Aufzählung der Zustände in der Reihenfolge (1,1), (2,1), ..., (5,2), "game over")

[4 Punkte]

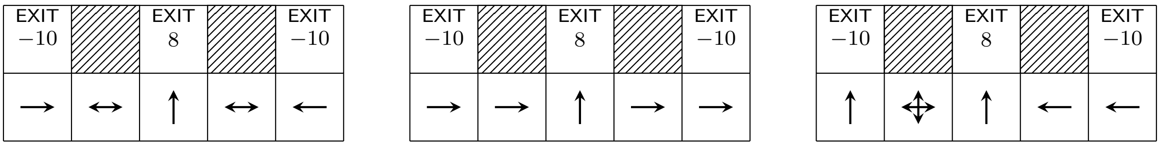
(d) Wie lässt sich Gl. (1) auf eine *stochastische* policy $\pi(a|s)$ verallgemeinern (wobei $\pi(a|s)$ die Wahrscheinlichkeit für Wahl der Aktion a im Zustand s angibt)?

Lösung

$$U^\pi(s) = R(s) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(s'|s,a)\, \pi(a|s)\, U^\pi(s') \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

[1 Punkt]

(e) Wir vergleichen folgende drei policy-Funktionen miteinander[1]:



(i) (ii) (iii)

Es bezeichne U^π die jeweilige Bewertungsfunktion gemäß policy-Auswertung, siehe Gl. (1) bzw. (d). Für $\frac{1}{2}(U^\pi((2,1)) + U^\pi((4,1)))$ ergeben sich hierbei die Werte 0.917, 1 und 1.143. Ordnen Sie diese Werte den Fällen (i), (ii) und (iii) zu, und begründen Sie Ihre Zuordnung kurz.

Lösung

	$\frac{1}{2}(U^\pi((2,1)) + U^\pi((4,1)))$
(i)	1.143
(ii)	1
(iii)	0.917

Fall (ii) wurde bereits in (c) gelöst, mit $U^\pi((2,1)) = 2$ und $U^\pi((4,1)) = 0$.

Für die policy (i) landet der Agent ausgehend von (2,1) bzw. (4,1) mit 50% Wahrscheinlichkeit im nächsten Schritt auf (3,1) und anschließend auf (3,2), d.h. mit 50% Wahrscheinlichkeit erhält er einen kumulativen reward 2; der entsprechende Beitrag zu $\frac{1}{2}(U^\pi((2,1)) + U^\pi((4,1)))$ ist also 1. Andernfalls landet der Agent zunächst auf (1,1) bzw. (5,1) und kehrt dann zum Ausgangsfeld zurück; letztendlich wird er somit stets auf Feld (3,2) ankommen, so dass $\frac{1}{2}(U^\pi((2,1)) + U^\pi((4,1)))$ größer als 1 sein muss.

Für policy (iii) erhält der Agent ausgehend von (4,1) sicher den kumulativen reward 2, also $U^\pi((4,1)) = 2$. Ausgehend von (2,1) landet der Agent aus Symmetriegründen mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Exit-Feld (1,2) oder (3,2); da die "Bestrafung" betragsmäßig größer ist, muss $U^\pi((2,1)) < 0$ gelten, und somit insgesamt der Mittelwert kleiner als 1 sein.

[3 Punkte]

Aufgabe 5 (Allgemeine Verständnisfragen)

(a) Geben Sie die Lichttransport-Gleichung an, und beschreiben Sie kurz, wie diese sowohl Reflexion als auch Transmission berücksichtigt.

Lösung

$$L_\mathsf{o}(\vec{p}, \vec{\omega}_\mathsf{o}) = L_\mathsf{e}(\vec{p}, \vec{\omega}_\mathsf{o}) + \int_{S_2} f(\vec{p}, \vec{\omega}_\mathsf{o}, \vec{\omega}_\mathsf{i})\, L_\mathsf{o}(t(\vec{p}, \vec{\omega}_\mathsf{i}), -\vec{\omega}_\mathsf{i})\, |\cos(\theta_\mathsf{i})|\, \mathrm{d}^2\omega_\mathsf{i},$$

wobei L_o gesucht ist und t die geometrische "trace"-Funktion bezeichnet. f fasst die "bidirectional reflectance distribution function" f_r für Reflexion und die "bidirectional transmittance distribution function" f_t für Transmission in einer Funktion zusammen, und selektiert zwischen diesen je nach Winkel zwischen $\vec{\omega}_\mathsf{i}$ und der Flächennormale.

[1] In den Exit-Feldern spielt die gewählte Aktion keine Rolle; deshalb ist dort kein Pfeil eingezeichnet. Der Doppelpfeil $\leftrightarrow$ bedeutet, dass eine der beiden Aktionen "links" und "rechts" mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird, und das Pfeilkreuz ✥, dass eine der vier Aktionen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird.

(b) Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine matrixwertige stetig differenzierbare Abbildung, so dass $A(x)$ invertierbar ist $\forall x \in \mathbb{R}$. Drücken Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)^{-1})$ durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)$ und $A(x)^{-1}$ aus.

Lösung

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(A(x)A(x)^{-1}\big) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right) A(x)^{-1} + A(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(A(x)^{-1}\big)\right),$$

somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(A(x)^{-1}\big) = -A(x)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right)A(x)^{-1}.$$

(c) Begründen Sie, wieso die Dimensionen des "cell state" und "hidden state" in einer LSTM-Zelle stets übereinstimmen.

Lösung Der nächste "hidden state" einer LSTM-Zelle berechnet sich als

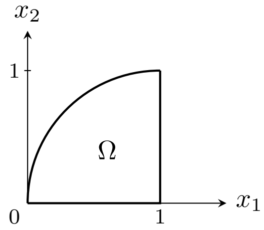
$$h^t = o^t \odot \tanh(c^t),$$

wobei o^t die Ausgabe des "output gate" ist, c^t der "cell state" und $\odot$ die punktweise Multiplikation bezeichnet. Somit stimmen die Dimensionen von h^t und c^t überein.

(d) Es soll die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

auf dem gezeigten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gelöst werden. Würden Sie hierfür die Finite-Differenzen-Methode oder die Finite-Elemente-Methode empfehlen? Erklären Sie Ihre Entscheidung kurz.



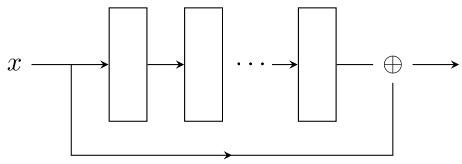
Lösung Finite-Differenzen benötigen eine achsen-parallele Geometrie, deshalb ist hier die Finite-Elemente-Methode zu empfehlen.

(e) Welchem Modellbaustein in der Arbeit "Auto-encoding variational Bayes" entspricht der Generator eines "generative adversarial network"?

Lösung Der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_\theta(x|z)$.

(f) Was versteht man unter einem "residual block" innerhalb eines künstlichen neuronalen Netzwerks? Inwiefern erleichtert bzw. verbessert er das Trainieren?

Lösung Ein "residual block" verwendet eine "skip connection" zum Überspringen mehrerer (interner) Schichten:



Dies erlaubt das Trainieren sehr tiefer Netze, das Problem verschwindender Gradienten wird behoben bzw. abgeschwächt.

[2 Punkte pro Teilaufgabe]