Prof. Dr. Stefan Neukamm, Institut für Wissenschaftliches Rechnen, TU Dresden

Modellierung und Simulation

Aufgabenblatt 1 Sommersemester 2017 30.05.2017

Aufgabe 1

Wir betrachten den gedämpften, harmonischen Oszillator

$$m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = 0$$

mit zu bestimmenden Dämpfungsparameter γ und

$$m = 1\mathsf{kg}, \qquad k = 2\mathsf{Nm}^{-1}.$$

(a) Bestimmen Sie $\gamma_c > 0$, so dass $\gamma = \gamma_c$ zu einem kritischem Verhalten führt.

(b) Begründen Sie (analytisch oder numerisch), dass durch die Wahl $\gamma = \gamma_c$ der Oszillator am schnellsten in seine Ruhelage $u \equiv 0$ zurückkehrt. Genauer: Für kleines $\ell > 0$ definiere $t_\ell > 0$ als die kleinste Zeit, so dass

$$\sup_{t \geq t_\ell} |u(t)| \leq \ell |u_0|.$$

Zu begründen ist also, dass für festes $0 < \ell \ll 1$ mit $\gamma = \gamma_c$ die Zeit t_ℓ minimiert wird.

(c) Sei $u_0 = 10\mathsf{cm}$, $v_0 = 10\mathsf{m}s$, $\ell := 0.1$. Berechnen Sie (numerisch) t_ℓ für $\gamma = 2^k\gamma_c$, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten den gedämpften, harmonischen Oszillator in der entdimensionalisierten, skalierten Form

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + u = 0.$$

Für $\delta > 0$ (hinreichend klein) betrachte die Zeitschritte $t_i = i\delta$, $i = 0, \ldots, N$, sowie Approximationen $u_0, \ldots, u_N$, $v_0, \ldots, v_N$ für u und $v = \dot{u}$.

1. Schreiben Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung, d.h. in der Form $\dot{U} = AU$ mit $U = (u, \dot{u})^t$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
2. Implentieren Sie das symplektische Euler Verfahren:
$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\delta} = -2\zeta v_i - u_i, \qquad \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta} = v_{i+1}.$$
3. Implentieren Sie das explizite Euler Verfahren:
$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\delta} = -2\zeta v_i - u_i, \qquad \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta} = v_i.$$
4. Testen Sie beide Verfahren für verschiedene Parameter und Anfangswerte (insbesondere auch im Fall $\zeta = 0$) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.