Prof. Dr. Stefan Neukamm, Institut für Wissenschaftliches Rechnen, TU Dresden

Modellierung und Simulation

Aufgabenblatt 1 Sommersemester 2017 21.06.2017

Aufgabe 1

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Dämpfung:

$$\begin{gathered} m\partial_t^2 u(t) + \lambda \partial_t u(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t) \\ u(0) = u_0, \qquad \partial_t u(0) = v_0. \end{gathered} \tag{1}$$

(siehe Beispiel 1.2 aus der Vorlesung).

(a) Bringen Sie die Gleichung durch Entdimensionalisierung in die Form

$$m^* \ddot{u}^* + \lambda^* \dot{u}^* + u^* = \sin(\cdot), \qquad u^*(0) = u_0^*, \qquad v^*(0) = v_0^*.$$

und gegeben Sie $m^*, \lambda^*, u_0^*, v_0^*, u^*, t^*$ an.

(b) Bringen Sie die Gleichung durch Entdimensionalisierung in die Form

$$\ddot{u}^* + 2\zeta^* \dot{u}^* + u^* = \sin(\omega^* \cdot), \qquad u^*(0) = u_0^*, \qquad v^*(0) = v_0^*.$$

und gegeben Sie ζ^*, ω^*, u_0^* v_0^*, u^*, und t^* an.

Aufgabe 2

Seien $f, \varphi : (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$. Wir betrachten nachfolgend immer die Asymptotik für $\varepsilon \to 0$.

(a) Sei $\varphi \neq 0$. Zeigen Sie: $f \sim \varphi$ genau dann, wenn $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = 1$.

(b) Sei $f(\varepsilon) := \ln \varepsilon$, $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon^\alpha$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f \sim \varphi$.

(c) Sei $f(\varepsilon) := \ln(\frac{1}{\varepsilon})$, $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon^\alpha$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f \sim \varphi$.

(d) Sei $f(\varepsilon) := \sin \varepsilon$, $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon^\alpha$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f \sim \varphi$.

Aufgabe 3

Seien $f, \varphi : (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Asymptotik $\varepsilon \to 0$. Sind nachfolgende Aussagen richtig oder falsch?

(a) $o(f) = o(f) + o(f)$

(b) $o(f)o(\varphi) = o(f\varphi)$

(c) $o(f)O(\varphi) = o(f\varphi)$

(d) $O(f)O(\varphi) = o(f\varphi)$

(e) Sei $\varphi = o(1)$. Dann gilt $\varphi f = o(f)$.

(f) Sei $\varphi = o(1)$. Dann gilt $\varphi f = o(f^2)$.

(g) $o(f) = o(1)f$.

(h) Sei $f = o(\varphi)$. Dann gilt $f \leq \varphi$ in $(0, \varepsilon_0)$.

(i) $o(o(f)) = o(f)$

(j) $O(o(f)) = o(f)$

(k) $o(O(f)) = o(f)$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so dass mit $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ die asymptotische Gleichung

$$a^2\varphi(\varepsilon)^k - 2a\varphi(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^2 = o(\varepsilon)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 5

Geben Sie eine asymptotische Entwicklung der Form

$$x_{2,\varepsilon} = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$$

für die Nullstellen der Gleichung

$$x^2 - 2x + \varepsilon\sin(x) = 0$$

an.

Aufgabe 6

Berechnen Sie eine asymptotische Entwicklung der Ordnung 1 für die algebraische Gleichung

$$(x-1)^2 - 9\varepsilon = 0$$

mittels der iterativen Methode.