

# Modellierung und Simulation <sup>1</sup>

Stefan Neukamm <sup>2</sup>

Dieser Text ist als Ergänzung zum zweiten Teil der Vorlesung *Modellierung und Simulation* gedacht. Er ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch das Studium eines Lehrbuches. Teile der Vorlesung basieren auf M. Brokate “Propädeutikum Mathematische Modellbildung” [http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/mop\\_ss09.pdf](http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/mop_ss09.pdf).

Bitte weisen Sie mich auf Korrekturen per Email an [stefan.neukamm@tu-dresden.de](mailto:stefan.neukamm@tu-dresden.de) hin.

---

<sup>1</sup>Begleittext zur Vorlesung, SoSe 2017, Version vom 25.04.2017

<sup>2</sup>Professur für Angewandte Analysis, TU Dresden,

<https://tu-dresden.de/mn/math/wir/neukamm/studium/lehveranstaltungen-1/MOSIM>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Dimensionsanalyse und Skalierung</b>	<b>3</b>
1.1	Mathematisches Modell, (physikalische) Dimension . . . . .	3
1.2	Skalierung . . . . .	6
1.3	Entdimensionalisierung . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Asymptotische Entwicklung</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Mehrskalenprobleme</b>	<b>22</b>
3.1	Homogenisierung . . . . .	23

# 1 Dimensionsanalyse und Skalierung

## 1.1 Mathematisches Modell, (physikalische) Dimension

- Ein mathematisches Modell stellt formale Zusammenhänge zwischen (**physikalischen / Modell-) Größen** ( $G$ ) oder Observable her. Eine ( $G$ ) ist eine *quantitative* Eigenschaft eines (physikalischen) Objektes, eines Zustandes oder Prozesses. Wir unterscheiden zwischen **Variablen** (abhängige und unabhängige) und **Parametern**. Eine **Lösung** eines mathematischen Modells stellt eine Relation zwischen ab- und unabhängigen Variablen her.
- Der Wert einer ( $G$ ) wird als Produkt aus einem numerischen Wert und einer (**Maß)einheit** dargestellt. Der Wert einer ( $G$ ) kann mittels verschiedener Einheiten dargestellt werden, wobei dann der numerische Wert entsprechend umgerechnet werden muss.  
Beispiel:

$$\ell = 1\text{m} = 39.03701\text{Zoll}$$

- Jeder ( $G$ )  $X$  wird eine **Dimension**  $[X]$  zugeschrieben, welche die qualitative Eigenschaft der Größe beschreibt. Beispiel:

$$[\ell] = \text{Länge}, \quad [t] = \text{Zeit}, \quad [v] = \text{Geschwindigkeit},$$

wobei die Geschwindigkeit sich als zusammengesetzte Dimension darstellen lässt:

$$[v] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}.$$

- Physikalische Größen lassen sich durch wenige **Basisgrößen** zusammensetzen. Das internationale Größensystem und Einheitensystem legt als Standard folgende Basisgrößen und Basiseinheiten fest:

physikalische Größe	Größensymbol	Dimensionssymbol	Basiseinheit	
<b>Länge</b>	$\ell$	L	<b>Meter</b>	m
<b>Masse</b>	$m$	M	<b>Kilogramm</b>	kg
<b>Zeit</b>	$t$	T	<b>Sekunde</b>	s
<b>Stromstärke</b>	$I$	I	<b>Ampere</b>	A
<b>Temperatur</b>	$T$	$\Theta$	<b>Kelvin</b>	K
<b>Stoffmenge</b>	$n$	N	<b>Mol</b>	mol
<b>Lichtstärke</b>	$I_V$	J	<b>Candela</b>	cd

Mit Hilfe dieser Basisgrößen lassen sich abgeleitete Größen und Einheiten definieren. Beispiele aus dem Bereich der Mechanik:

physikalische Größe	Größensymbol	Dimensionssymbol	Basiseinheit	
<b>Geschwindigkeit</b>	$v$	$LT^{-1}$		$\text{m s}^{-1}$
<b>Beschleunigung</b>	$a$	$LT^{-2}$		$\text{m s}^{-2}$
<b>Kraft</b>	$F$	$\text{m}LT^{-2}$	<b>Newton</b>	$\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$
<b>Impuls</b>	$p$	$\text{m}LT^{-1}$		$\text{N s}$

- Mathematische Modelle basieren auf Gleichungen, wie etwa

- algebraische Gleichungen, z.B.  $f(u) = u(1 - u)$  (Wachstumsmodell)
- gewöhnliche Differentialgleichungen, z.B.  $\partial_t u = f(u)$  (exponentielles Wachstumsmodell mit Sättigung)
- partielle Differentialgleichungen, z.B.  $\partial_t u - c\Delta u = f(u)$  (Fisher-Gleichung)
- Originär sind die Größen in Gleichungen mathematischer Modelle **dimensionsbehaftet**. Hierbei gilt:

- Werden dimensionsbehaftete Größen multipliziert, potenziert oder dividiert, so werden die Dimensionen multipliziert, potenziert oder dividiert.

*Beispiele: Flächeninhalt eines Würfels  $A = (\text{Kantenlänge } x)^2$ ,  $[A] = \text{L}^2$ .*

*Beschreibt  $x(t)$  den Ortsvektor eines Punktes zum Zeitpunkt  $t$ , dann gilt für Geschwindigkeit und Beschleunigung*

$$[\partial_t x(t)] = \left[ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \right] = \text{LT}^{-1}$$

*sowie*

$$[\partial_t^2 x(t)] = \text{LT}^{-2}.$$

- Nur Größen gleicher Dimension dürfen addiert, subtrahiert und verglichen werden.

*Beispiel: Das zweite Newtonsche Gesetz besagt*

$$F = ma \quad (\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung})$$

*Damit die Gleichung zulässig ist, muss gelten*

$$[F] = [m][a] = \text{MLT}^{-2}.$$

- In Funktionen können nur dimensionslose Größen eingesetzt werden.

*Beispiel: Der Ausdruck  $\exp(x)$  mit  $[x] = \text{L}$  ist nicht zulässig, denn  $\exp(x) = x^0 + x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$  – eine Summe mit Termen der Dimension  $\text{L}^i$   $i = 0, 1, 2, 3, \dots$*

*Beispiel: Periodisch variierende Kraft*

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

*mit  $F_0$  Kraft,  $t$  Zeit und Frequenz  $[\omega] = \text{T}^{-1}$ .*

- Aus einer dimensionsbehafteten Größe  $x$  kann eine dimensionslose Größe  $\tilde{x}$  gewonnen werden, indem  $x$  durch eine Referenzgröße gleicher Dimension geteilt wird.

*Beispiel:  $t$  Zeit,  $\tilde{t} = \frac{t}{1\text{s}}$ .*

- Wir nennen ein System (physikalischer) Dimensionen *unabhängig*, falls keine der Dimensionen sich als Produkt von Potenzen der anderen Dimensionen darstellen läßt.

*Beispiel: (Länge, Zeit, Geschwindigkeit) ist nicht unabhängig.*

**B2** **Beispiel 1.1** (Newtonsche Mechanik). Wir betrachten die Dynamik eines Punktes mit Ortsvektor  $x(t)$  und Masse  $m$  in einem Kraftfeld, welches wir durch ein skalares Potential darstellen:

$$m\ddot{x}(t) = F_0 \nabla \Phi(\ell_0^{-1}x(t))$$

wobei  $\ell_0$  eine Referenzlänge bezeichnet,  $F_0$  eine (eindimensionale) Referenzkraft und  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Potential, z.B.  $\Phi(x) = |x|^{2-d}$ . Um eine eindeutige Lösung erwarten zu können benötigen wir noch Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Größe	Symbol	Dimension	Variable/Parameter
Zeit	$t$	T	unabhängige Variable
Ortsvektor	$x = (x_1, x_2, x_3)$	L	abhängige Variable
Beschleunigungsvektor	$\ddot{x}$	LT <sup>-2</sup>	abhängige Variable
Masse	$m$	M	Parameter
Referenzlänge	$\ell_0$	L	Parameter
Referenzkraft	$F_0$	MLT <sup>-2</sup>	Parameter
Anfangsposition	$x_0$	L	Parameter
Anfangsgeschwindigkeit	$v_0$	LT <sup>-1</sup>	Parameter

*Beispiel :* Wir betrachten zwei Elektronen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass eines der Elektronen sich immer bei 0 befindet. Die Position des zweiten Elektrons beschreiben wir durch  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} m &= 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg} && \text{Ladung eine Elektronen} \\ e &= -1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} && \text{Ladung eine Elektronen} \\ \ell_0 &= 1 \text{m} \\ F_0 &= 8.987 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2} e^2 \\ \Phi(x) &= -|x|^{-1}, \quad \nabla \phi(x) = \frac{x}{|x|^3}. \end{aligned}$$

**B1** **Beispiel 1.2** (periodisch getriebener harmonischer Oszillator). (a) *Mathematisches Modell*

- **Kinematik** (=Beschreibung der Bewegung):  $u(t) \equiv$  die Auslenkung zum Zeitpunkt  $t$ . Konvention:  $u = 0 \Leftrightarrow$  Feder spannungsfrei,  $u > 0 \Leftrightarrow$  Feder gedehnt.
- **Bewegungsgleichung:**

$$m\partial_t^2 u(t) + \lambda\partial_t u(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t) \tag{1.1} \quad \boxed{\text{B1: eq1}}$$

Zweites Newtonsches Gesetz:  $m\partial_t^2 u = F$

Auf den Massenpunkt wirkende Kräfte:

- Rückstellkraft (Hookesches Gesetz):  $-ku$
- Dämpfung (viskose Reibung, Stokessche Gleichung):  $-\lambda\partial_t u$

– Periodische Treibkraft:  $F_0 \sin(\omega t)$

- Anfangsbedingungen:

$$u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = v_0. \quad (1.2) \quad \boxed{\text{B1: eq2}}$$

(b) *Physikalische Größen und Dimensionen*

Größe	Symbol	Dimension	Variable/Parameter
Zeit	$t$	$\mathsf{T}$	unabhängige Variable
Auslenkung	$u$	$\mathsf{L}$	abhängige Variable
Geschwindigkeit	$\partial_t u$	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$	abhängige Variable
Beschleunigung	$\partial_t^2 u$	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}$	abhängige Variable
Masse	$m$	$\mathsf{M}$	Parameter
Dämpfungskonstante	$\lambda$	$\mathsf{M}\mathsf{T}^{-1}$	Parameter
Federkonstante	$k$	$\mathsf{M}\mathsf{T}^{-2}$	Parameter
Maximaletriebkraft	$F_0$	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\mathsf{M}$	Parameter
Winkelgeschwindigkeit / Frequenz	$\omega$	$\mathsf{T}^{-1}$	Parameter
Anfangsauslenkung	$u_0$	$\mathsf{L}$	Parameter
Anfangsgeschwindigkeit	$v_0$	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$	Parameter

## 1.2 Skalierung

Die Methode der Skalierung hat zum Ziel die Freiheitsgrade (Parameter) eines Modells zu reduzieren. Mit Skalierung kann erreicht werden, dass bestimmte Größen nach Transformation dimensionslos werden und in der Größenordnung 1 liegen. Hierdurch können später Terme identifiziert werden, die vernachlässigt werden können.

Ein generelles Schema der Skalierung ist folgendes: Gegeben ein Modell mit Variablen  $x_1, \dots, x_\ell$  und Relation  $f(x_1, \dots, x_\ell) = 0$ . Wir führen "skalierte" Variablen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_\ell$  mittels einer Transformation  $\tilde{x} = \Lambda(x)$  ein. Typische ist diese linear, d.h.  $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} x_j$ , wobei die Koeffizienten  $a_{ij}$  dimensionsbehaftet sein dürfen. Schließlich wird das Modells transformiert, d.h. eine Relation  $\tilde{f}$  gefunden, so dass  $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_\ell) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_\ell) = 0$ . Wir führen die Methode Anhand von Beispielen ein.

**Beispiel 1.3** (Skalierung der Diffusionsgleichung). *Wir betrachten die Diffusionsgleichung*

$$\partial_t u(t, x) - c \Delta u(t, x) = f(t, x),$$

mit  $[t] = \mathsf{T}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_3)$ ,  $[x] = [x_i] = \mathsf{L}$ ,  $[u] = \mathsf{N}\mathsf{L}^{-3}$ ,  $c = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$  (Diffusionskonstante),  $[f] = \mathsf{N}\mathsf{L}^{-3}\mathsf{T}^{-1}$  (Quelldichte). Sei  $\tau > 0$  ein Skalierungsparameter. Dann gilt mit

$$\tilde{t} := \tau t, \quad \tilde{x} = \sqrt{\tau} x, \quad \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) = u(\tau^{-1}\tilde{t}, \tau^{-1/2}\tilde{x}), \quad \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) := \tau f(\tau^{-1}t, \tau^{-1/2}x)$$

die Gleichung

$$\partial_t \tilde{u} - c \Delta \tilde{u} = \tilde{f}.$$

Die Dimensionen der Größen haben sich hierbei nicht geändert.

**Beispiel 1.4** (Fortsetzung Beispiel <sup>B2</sup> 1.1).

$$m\ddot{x}(t) = F_0 \nabla \Phi(\ell_0^{-1}x(t))$$

Wir führen die Referenzzeit

$$\tau := \sqrt{\frac{m\ell_0}{F_0}}, \quad [\tau] = \text{T}$$

ein und die dimensionslosen Größen

$$t^* = \tau^{-1}t, \quad x^*(t^*) = \frac{x(t)}{\ell_0}.$$

Dann gilt

$$\dot{x}(t) = \ell_0 \tau^{-1} \dot{x}^*(t^*), \quad \ddot{x}(t) = \ell_0 \tau^{-2} \ddot{x}^*(t^*) = \frac{F_0}{m} \ddot{x}^*(t^*)$$

und damit

$$\ddot{x}^*(t^*) = \nabla \Phi(x^*(t^*)).$$

In dieser Gleichung tauchen keine Parameter mehr auf! Für die Anfangswerte erhalten wir:

$$x^*(0) = \ell_0^{-1}x_0, \quad \dot{x}^*(0) = \sqrt{\frac{m}{F_0\ell_0}}v_0.$$

**B1b** **Beispiel 1.5** (Harmonischer Oszillator, Beispiel <sup>B1</sup> 1.2). Wir betrachten Beispiel <sup>B1</sup> 1.2 ohne treibende Kraft

$$m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = 0, \quad u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0. \quad (1.3)$$

eq:B1:harm

Dieses Problem besitzt 5 Parameter. Für verschiedene Werte beobachten wir unterschiedliches qualitatives Verhalten:

- (a) Exponentielles (einseitiges) Annähern an einen Gleichgewichtszustand
- (b) Exponentielles Annähern an einen Gleichgewichtszustand (möglicherweise mit einem Überschlag)
- (c) Schwingen mit abnehmender Amplitude
- (d) Schwingen mit gleichbleibender Amplitude

**P:** Regime  $\leftrightarrow$  Parameter?

1. Skalierung: Setze

$$\zeta := \frac{\gamma}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

mit Dimensionen  $[\zeta] = 1$ ,  $[\omega] = \text{T}^{-1}$ . Wir skalieren:

$$\tilde{u}(\tilde{t}) := \frac{1}{u_0} u\left(\frac{\tilde{t}}{\omega}\right).$$

Dann ist  $u$  dimensionslos und eq:B1:harm:1 (I.3) gilt genau dann, wenn

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(0) = 1, \quad \dot{\tilde{u}}(0) = \frac{1}{\omega} \frac{v_0}{u_0}. \quad (1.4) \quad \text{eq:B1:harm}$$

Nachfolgend nehmen wir an, dass  $v_0 = 0$  und schreiben (der Kürze wegen)  $u(t)$  statt  $\tilde{u}(t)$ .

2. Untersuchung der skalierten Gleichung.

*Exkurs: Lösung gewöhnlicher, linearer DGL der Form*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = f,$$

mit konstanten reellen Koeffizienten.

- *Homogene Lösung.* Sei  $f = 0$ . Wir betrachten Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

- Ist  $\lambda$  eine  $m$ -fache (reelle) Nullstelle, dann sind die Funktionen

$$t^\ell \exp(\lambda t), \quad \ell = 0, \dots, m-1$$

linear unabhängige Lösungen.

- Ist  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  eine  $m$ -fache komplex konjugierte Nullstelle, dann sind die Funktionen

$$t^\ell \exp(\alpha t) \sin(\beta t), \quad t^\ell \exp(\alpha t) \cos(\beta t), \quad \ell = 0, \dots, m-1$$

linear unabhängige Lösungen.

Obiges Resultat erhält man durch Betrachten des Ansatzes  $t^\ell \exp(\lambda t)$ .

Für eq:B1:harm:2 (I.4) ist das charakteristische Polynom durch

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1$$

gegeben. Nullstellen sind charakterisiert durch  $\lambda_{1/2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ . Setze

$$\omega_0 := \sqrt{|\zeta^2 - 1|} \geq 0.$$

Es ergeben sich drei Fälle

- (i) (Kritisch Dämpfung)  $\zeta = 1$  ( $\omega_0 = 0$ ). Wir erhalten die homogenen Lösungen

$$u_1(t) = \exp(-t), \quad u_2(t) = t \exp(-t).$$

Mit den Anfangswerten erhalten wir

$$u(t) = \exp(-t)(1 + t).$$

(ii) (Superkritische Dämpfung)  $\zeta > 1$ . Wir erhalten die homogenen Lösungen

$$u_{1/2}(t) = \exp(-\zeta t) \exp(\pm \omega_0 t)$$

Mit den Anfangswerten erhalten wir

$$u(t) = \exp(-\zeta t) \frac{1}{2} \left( \left(1 + \frac{\zeta}{\omega_0}\right) \exp(\omega_0 t) + \left(1 - \frac{\zeta}{\omega_0}\right) \exp(-\omega_0 t) \right).$$

(iii) (Subkritische Dämpfung)  $\zeta < 1$ . Wir erhalten die homogene Lösung

$$u_1(t) = \exp(-\zeta t) \sin(\omega_0 t), \quad u_2(t) = \exp(-\zeta t) \cos(\omega_0 t).$$

Mit den Anfangswerten erhalten wir

$$u(t) = \exp(-\zeta t) \cos(\omega_0 t).$$

Die Fälle (i) – (iii) korrespondieren zu (a) – (c). Fall (d) entspricht (iii) mit  $\zeta = 0$ .

**Übung 1.1.** Wir betrachten den gedämpften, harmonischen Oszillator aus Beispiel B1b  
17.5 mit zu bestimmenden Dämpfungsparameter  $\gamma$  und

$$m = 1 \text{ kg}, \quad k = 2 \text{ Nm}^{-1}.$$

- (a) Bestimmen Sie  $\gamma_c > 0$ , so dass  $\gamma = \gamma_c$  zu einem kritischem Verhalten führt.
- (b) Zeigen Sie (analytisch oder numerisch), dass durch die Wahl  $\gamma = \gamma_c$  der Oszillator am schnellsten in seine Ruhelage  $u \equiv 0$  zurückkehrt. Genauer: Für kleines  $\ell > 0$  definiere  $t_\ell > 0$  als die kleinste Zeit, so dass

$$\sup_{t \geq t_\ell} |u(t)| \leq \ell |u_0|.$$

Behauptung: Für  $\gamma = \gamma_c$  und festes  $0 < \ell \ll 1$  wird  $t_\ell$  minimiert wird.

- (c) Sei  $u_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $v_0 = 10 \text{ ms}$ ,  $\ell := 0.1$ . Berechnen Sie (numerisch)  $t_\ell$  für  $\gamma = 2^k \gamma_c$ ,  $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

**Übung 1.2.** Wir betrachten den gedämpften, harmonischen Oszillator aus Beispiel B1b  
17.5 in der entdimensionalisierten, skalierten Form

$$\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + u = 0.$$

Für  $\delta > 0$  (klein genug) betrachte die Zeitschritte  $t_i = i\delta$ ,  $i = 0, \dots, N$ , sowie Approximationen  $u_0, \dots, u_N$ ,  $v_0, \dots, v_N$  für  $u$  und  $v = \dot{u}$ .

1. Implementieren Sie das symplektische Euler Verfahren:

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\delta} = -2\zeta v_i - u_i, \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta} = v_{i+1}.$$

2. Implementieren Sie das explizite Euler Verfahren:

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\delta} = -2\zeta v_i - u_i, \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta} = v_i.$$

3. Testen Sie beide Verfahren (insbesondere im Fall  $\zeta = 0$ ) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.

30.5.2017

13.6.2017

**Beispiel 1.6** (Senkrechter Wurf). Ein Körper konstanter Masse  $m$  steigt antriebslos von der Erdoberfläche mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  senkrecht nach oben. Zum Zeitpunkt  $t$  hat er die Höhe  $x(t)$  über der Erdoberfläche. Auf ihn wirkt die Schwerkraft

$$F = -mg \frac{R^2}{(x(t) + R)^2}$$

mit Erdbeschleunigung  $g$  und Erdradius  $R$ . Das zweite Newtonsche Gesetz ergibt

$$m\ddot{x} = -mg \frac{R^2}{(x + R)^2}$$

mit Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Wir führen nachfolgende Referenzlänge und Referenzzeit ein:

$$\ell = \frac{v_0^2}{g}, \quad \tau = \frac{v_0}{g},$$

und betrachten

$$t^* = \tau^{-1}t, \quad x^*(t^*) = \ell^{-1}x(t).$$

Dann folgt

$$\ddot{x}(t) = \ell\tau^{-2}\ddot{x}^*(t^*) = g\ddot{x}^*(t^*),$$

also mit  $\varepsilon = \frac{\ell}{R}$ :

$$\ddot{x}^* = -\frac{1}{(\varepsilon x^* + 1)^2}, \quad x^*(0) = 0, \quad \dot{x}^*(0) = \frac{\tau}{\ell}v_0 = 1. \quad (1.5) \quad \boxed{\text{senkrecht}}$$

Für kleine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ist  $\varepsilon \ll 1$  und die rechte Seite näherungsweise  $-1$ . Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{\tilde{x}} = -1, \quad \tilde{x}(0) = 0, \quad \dot{\tilde{x}}(0) = 1,$$

besitzt die Lösung  $t \mapsto t - \frac{1}{2}t^2$ . Wir werden später sehen, dass im für  $\varepsilon \ll 1$  diese Lösung eine Näherung für  $x^*$  ergibt. Also folgt

$$x(t) = \ell x^*(\tau^{-1}t) \approx \ell(\tau^{-1}t - \frac{1}{2\tau^{-2}}t^2) = v_0t - \frac{g}{2}t^2.$$

### 1.3 Entdimensionalisierung

#### Motivation:

- Wir erwarten, dass relevante Aussagen des Modells nicht davon abhängen, wie die Einheiten der jeweiligen (physikalischen) Größen gewählt werden (modulo entsprechender Transformation von Zahlenwerten). Es ist daher naheliegend zu versuchen, die Gleichungen des mathematischen Modells in eine **dimensionslose Form** zu bringen, d.h. in eine Form, die nur noch numerische Werte beinhaltet.
- Mathematische Aussagen und numerische Simulationen sind dimensionslos formuliert.
- Das Modell aus Beispiel [B1](#) [1.2](#) (harmonischer Oszillator) hat 7 Parameter, die im Experiment verändert werden können. Muß die Abhängigkeit der Lösung

$$u = u(t; m, \lambda, k, F_0, \omega, u_0, v_0)$$

von allen Parametern untersucht werden, um das System zu verstehen? Wir werden sehen, dass es ausreichend ist, ein System mit weniger Freiheitsgraden zu untersuchen. Die Abhängigkeit von  $u$  und von den 7 Parametern ergibt sich dann durch einfache Transformationsvorschriften, wie im Kapitel Skalierung diskutiert.

Die Methode der **Entdimensionalisierung** ist eine systematische, konstruktive Methode durch Transformation von Variablen und Parametern ein Modell in dimensionsloser Form zu gewinnen. Wir beschreiben die Methode und betrachten ein Modell mit

- $k$  skalaren Variablen  $x_1, \dots, x_k$ ,
- $\ell$  skalaren Parametern  $x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}$ ,
- $m$  (unabhängige) Dimensionen  $d_1, \dots, d_m$ .
- skalare Modellgleichung

$$f(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = 0.$$

In einem ersten Schritt werden dimensionslose Größen identifiziert. Hierzu betrachten wir Produkte der Form

$$x_1^{r_1} \cdots x_{k+\ell}^{r_{k+\ell}},$$

und fragen uns, welche Wahl von  $r \in \mathbb{Q}^{k+\ell}$  eine dimensionslose Größe ergibt. Hierzu bezeichne  $S \in \mathbb{Q}^{m \times (k+\ell)}$  eine Matrix, so dass

$$[x_j] = \prod_{i=1}^m d_i^{S_{ij}}.$$

Dann gilt

$$[x_1^{r_1} \cdots x_{k+\ell}^{r_{k+\ell}}] = \prod_{j=1}^{k+\ell} [x_j]^{r_j} = \prod_{j=1}^{k+\ell} \prod_{i=1}^m d_i^{S_{ij} r_j} = \prod_{i=1}^m d_i^{(S r)_i}.$$

Damit diese Größe dimensionslos ist, muss  $r$  das Gleichungssystem

$$Sr = 0$$

erfüllen. Der Lösungsraum dieses unterbestimmten Gleichungssystem ist  $(k + \ell) - m$ -dimensional. Es bezeichne  $R \in \mathbb{Q}^{(k+\ell) \times ((k+\ell)-m)}$  eine Matrix, deren Zeilen den Lösungsraum aufspannen, d.h.  $SR = 0$ . Dann sind durch  $q_j = \prod_{i=1}^{k+\ell} x_i^{R_{ij}}$  dimensionslose Größen definiert. Die Wahl von  $R$  ist nicht eindeutig. Praktikabel ist es  $R$ , so zu wählen, dass in der Definition der entdimensionalisierten Größen  $q_1, \dots, q_{(k+\ell)-m}$  die Variablen  $x_1, \dots, x_k$  möglichst genau einmal (mit Exponent 1) vorkommen. Zuletzt schreiben wir die skalare Modellgleichung in einen Zusammenhang  $\tilde{f}(q_1, \dots, q_{(k+\ell)-m}) = 0$  um.

Das obige vorgehen wird durch nachfolgendes Theorem (ohne Beweis) formalisiert:

**Satz 1.7** (Buckingham'sche  $\Pi$ -Theorem). *Gegeben sei ein mathematisches Modell mit  $k$  Variablen  $x_1, \dots, x_k$  und  $\ell$  Parametern  $x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}$ , in dem  $m$  unabhängige Dimensionen vorkommen. Dann können  $k + \ell - m$  dimensionslose Größen  $q_1, \dots, q_{k+\ell-m}$  als Produkte und Quotienten von  $x_1, \dots, x_{k+\ell}$  definieren werden, und jede skalare Modellgleichung  $f(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = 0$  kann auf eine Relation  $\tilde{f}(q_1, \dots, q_{k+\ell-m}) = 0$  reduziert werden.*

(Namensgebung: Buckingham bezeichnete die dimensionslosen Größen mit  $\Pi$ ).

**Bemerkung:** Zum finden der dimensionslosen Größen ist es nicht notwendig die Modellgleichung zu kennen!

**Beispiel 1.8** (Fadenpendel). *Wir betrachten ein Federpendel mit Masse  $m$ , Pendellänge  $\ell$ , Erdbeschleunigung  $g$ . Die Position des Pendels zum Zeitpunkt  $t$  wird durch einen Winkel  $\varphi(t)$  beschrieben.*

Größe	Symbol	Dimension	Variable/Parameter
Zeit	$t$	T	unabhängige Variable
Auslenkungswinkel	$\varphi$	1	abhängige Variable
Anfangswinkel	$\varphi_0$	1	Parameter
Masse	$m$	M	Parameter
Pendellänge	$\ell$	L	Parameter
Erdbeschleunigung	$g$	LT <sup>-2</sup>	Parameter

$$S = \begin{array}{cccccc} & t & \varphi & \varphi_0 & m & \ell & g \\ \text{T} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{M} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$S^{-1}\{0\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

2 + 4 Größen, 6 – 3 dimensionslose Größen, nämlich:

$$\varphi^* = \varphi, \quad \varphi_0^* = \varphi_0, \quad t^* = t\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Buckingham  $\Pi$ -Theorem impliziert nun, dass eine Relation eindeutige Relation zwischen  $\varphi^*$ ,  $\varphi_0^*$ ,  $t^*$ . Insbesondere ist die Bewegung des Pendels nicht von der Masse abhängig.

**P:** Wir transportieren das Pendel auf den Mond. Wie muss die Pendellänge verändert werden, so dass sich (bei gleichem Anfangswinkel) die Pendelbewegung nicht verändert? Es gilt Erdbeschleunigung/Mondbeschleunigung  $\approx 6$ . Antwort: Es muss gelten

$$\sqrt{\frac{\ell_{\text{erde}}}{g_{\text{erde}}}} = \sqrt{\frac{\ell_{\text{mond}}}{g_{\text{mond}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \ell_{\text{mond}} = \ell_{\text{erde}} \frac{g_{\text{mond}}}{g_{\text{erde}}} \approx \frac{1}{6} \ell_{\text{erde}}$$

Für  $\varphi_0^*$  konstant und  $t^*$  monoton wachsend sei ein dimensionsloses Modell

$$\varphi^*(t^*) = f^*(t^*, \varphi_0^*)$$

gegeben. Wir nehmen an, dass die Bewegung periodisch in der Zeit ist, also

$$\exists \tau^* > 0 \quad \forall \varphi_0^*, t^* : \quad f^*(t^* + \tau^*, \varphi_0^*) = f^*(t^*, \varphi_0^*).$$

( $\tau^*$  ist möglicherweise unbekannt).

**P:** Wie verändert sich die Periode, wenn  $\ell$  und  $g$  sich ändern? Wegen  $t = t^* \sqrt{\frac{\ell}{g}}$  und damit  $\tau = \tau^* \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ , folgt die Proportionalität

$$\tau \sim \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

**Beispiel 1.9** (Fortsetzung von Beispiel <sup>B1</sup>I.2). Siehe Blatt 2.

**Beispiel 1.10** (Sobolev-Poincaré Ungleichung). In der Analysis zeigt man, dass eine Konstante  $C = C(d)$  und ein Exponent  $p = p(d)$  existiert, so dass für alle  $Q \subset \mathbb{R}^d$  ( $d > 2$ ) Würfel die Abschätzung

$$\forall u \in C_c^\infty(Q) : \left( \int_Q |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(d) \left( \int_Q |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. Wir können mittels Dimensionsanalyse den richtigen Exponenten ermitteln.

$$\begin{aligned} [\text{linke Seite}] &= [u](L)^{\frac{d}{p}} \\ [\text{rechte Seite}] &= [u](L)^{\frac{d-2}{2}} \end{aligned}$$

Die Abschätzung kann nur richtig sein, wenn die Dimensionen auf beiden Seiten identisch sind. Also, wenn  $\frac{d}{p} = \frac{d-2}{2}$ , d.h.  $p = \frac{2d}{d-2}$ .

## 2 Asymptotische Entwicklung

3

In der asymptotischen Analysis betrachtet man mathematische Modelle/Probleme  $(P_\varepsilon)$ , die von einem kleinem Parameter "ε" abhängig sind. Ein Beispiel hierfür ist durch den senkrechten Wurf, (1.5), im Regime  $\ell \ll R$ . Ziel ist es das ε-Abhängig Problem durch ein vereinfachtes approximierendes Problem zu ersetzen. Hierbei ergeben sich die Fragen:

- Wie findet man ein approximierendes Problem, welches für kleines ε gute Näherungen liefert?
- Was bedeutet "gute Näherung"?

Wir entwickeln und motivieren grundlegende Begriffe zunächst am Beispiel algebraischer Gleichungen.

**Beispiel 2.1.**

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0 \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (P_\varepsilon) \quad \boxed{\text{quadratic}}$$

(Die exakte Lösungen sind durch  $x(\varepsilon) = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$  gegeben). Zur formalen Herleitung approximierender Probleme nehmen wir an, dass Näherungen in der Form (Potenzreihe)

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k$$

gefunden werden können, wobei die Koeffizienten  $a_k$  bestimmt werden müssen. Zur Bestimmung nehmen wir an, dass die Lösung  $x(\varepsilon)$  dem Potenzreihenansatz

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k$$

genügt. Einsetzen in  $(P_\varepsilon)$  führt auf

$$\left(\sum_k a_k \varepsilon^k\right)^2 + \sum_k 2\varepsilon^{k+1} a_k - 1 = 0.$$

Gliedweises multiplizieren führt auf

$$(a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon + (2a_0a_2 + a_1^2)\varepsilon^2 + \dots) + 2a_0\varepsilon + 2a_1\varepsilon^2 + \dots - 1 = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun

$$\begin{aligned} a_0^2 - 1 = 0 & \Rightarrow a_0 = \pm 1 \\ 2a_0a_1 + 2a_0 = 0 & \Rightarrow a_1 = -1 \\ 2a_0a_2 + a_1^2 + 2a_1 = 0 & \Rightarrow a_2 = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Näherungen

$$x_0(\varepsilon) = \pm 1, \quad x_1(\varepsilon) = \pm 1 - \varepsilon, \quad x_2(\varepsilon) = \pm 1 - \varepsilon \pm \frac{1}{2}\varepsilon.$$

---

<sup>3</sup>In diesem Kapitel sind nur die wesentlichen Definitionen und Beispiele aufgeführt. Weitere Beispiele und Anmerkungen wurden in der Vorlesung diskutiert.

Die Näherungen aus diesem Beispiel sind Beispiele für asymptotische Entwicklungen. Hierbei interessiert man sich für das Verhalten  $\varepsilon \rightarrow 0$  bei fester Ordnung  $n$ . Im Gegensatz interessiert man sich bei Taylorentwicklungen für das Verhalten  $n \rightarrow \infty$  bei festem  $\varepsilon > 0$ .

**Definition 2.2** (Landausche Ordnungssymbole). *Seie  $g, \varphi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wir sagen, dass*

$$g = O(\varphi) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

*falls*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|g(\varepsilon)|}{|\varphi(\varepsilon)|} < \infty \quad (\text{Konvention: } \frac{0}{0} = 1).$$

*Wir sagen, dass*

$$g = o(\varphi) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

*falls*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|g(\varepsilon)|}{|\varphi(\varepsilon)|} = 0.$$

**Definition 2.3** (Asymptotische Näherung). *Seien  $f, \varphi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow X$ ,  $X$  normierter Raum.  $\varphi$  heißt **asymptotische Näherung** von  $f$ , falls*

$$\|f - \varphi\| = o(\|\varphi\|).$$

*(Hierbei bezeichnet  $\|f - \varphi\|$  die Funktion  $\varepsilon \mapsto \|f(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\| \in \mathbb{R}$ .  $\|\varphi\|$  wird analog verstanden.) Wir schreiben dann*

$$f \sim \varphi,$$

*oder auch*

$$f = \varphi + o(\varphi).$$

**Beispiele 2.4.**

$$u_\varepsilon(t) := t + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(a) *(Punktweise Betrachtung). Es gilt*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &\sim t && \text{für } t > 0 \text{ fest,} \\ u_\varepsilon(0) &\sim 1. \end{aligned}$$

(b) *(Funktionsweise Betrachtung). Setze  $X = C[0, 1]$ ,  $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, t) := t$ . Dann ist  $\varphi$  keine asymptotische Näherung zu  $f$ , denn  $\|f(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\| = 1$ .*

*Jedoch gilt mit  $X = L^1(0, 1)$ :*

$$\|f(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\| = \int_0^1 \left| \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| dt \leq \varepsilon = o(\|\varphi\|).$$

*D.h. die Eigenschaft  $f \sim \varphi$  ist von der Wahl der Topologie abhängig.*

**Definition 2.5** (Asymptotische Entwicklung). Eine (endliche oder unendliche) Folge von Funktionen  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  mit  $\varphi_k : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **asymptotische Folge**, falls  $\varphi_{k+1} = o(\varphi_k)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Eine Funktion  $f : (0, \varepsilon_0) \rightarrow X$ ,  $X$  normierter Raum, besitzt eine asymptotische Entwicklung der Ordnung  $n$  (bzgl.  $(\varphi_k)$ ), falls es Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots \in X$  gibt, so dass

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(\varepsilon) + o(\varphi_m), \quad \forall m \leq n.$$

**Beispiel 2.6.**

$$X = C\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right), \quad f(\varepsilon) := f(\varepsilon, t) = (\varepsilon^2 t + 1)^{-2}.$$

- Eine Taylorentwicklung zeigt, dass  $g(t) = (t^2 + 1)^{-2} = \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k t^k + O(t^{m+1})$  für  $|t| < 1$  mit  $\tilde{a}_k = (-1)^k (1+k)$ .
- Einsetzen von  $\varepsilon^2 t$  führt auf

$$f(\varepsilon, t) = \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k t^k \varepsilon^{2k} + O((\varepsilon^2 t)^{k+1}).$$

Setze  $\varphi_k(\varepsilon) := \varepsilon^{2k}$  und  $a_k(t) := \tilde{a}_k t^k \in X$ . Wegen  $|t| \leq \frac{1}{2}$ , gilt

$$O(\max_{|t| \leq \frac{1}{2}} (\varepsilon^2 t)^{k+1}) = O(\varepsilon^{2(k+1)}) = o(\varphi_k).$$

Also

$$f(\varepsilon, t) = \sum_{k=0}^m a_k(t) \varphi_k(\varepsilon) + o(\varphi_k)$$

Damit besitzt  $f$  eine asymptotische Entwicklung bzgl.  $(\varphi_k)$ .

Asymptotische Entwicklungen werden häufig für Probleme der Form

$$F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0, \quad F : X \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow Y, \quad X, Y \text{ normierte Räume} \quad (2.1) \quad \boxed{\text{eq:peps}}$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gesucht.

**Definition 2.7** (Reguläre und Singuläre Störung). Annahme die Lösung  $u_\varepsilon$  zu [\(2.1\)](#) [eq:peps](#) besitzt eine asymptotische Entwicklung bzgl.  $(\varphi_k)$ . Wir nennen das Problem **regulär gestört**, falls  $\varphi_0 = 1$ . Der Ansatz  $u_{m,\varepsilon} = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k$  heißt dann **reguläre Störung**. Wir nennen das Problem **singulär gestört**, falls  $a_0 \neq 0$  und  $\varphi_0$  (für  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

Bemerkungen:

- Asymptotische Entwicklungen sind nicht eindeutig. Insbesondere ist ein Problem singulär/regulär gestört, falls eine asymptotische Entwicklung existiert mit den Eigenschaften aus obiger Definition.
- Für ein regulär gestörtes Problem gilt  $u_\varepsilon = O(1)$ .

- Für ein singular gestörtes Problem gilt  $u_\varepsilon \neq O(1)$

**Definition 2.8.** Wir nennen eine Näherung  $u_{m,\varepsilon}$  für [\(2.1\)](#) <sup>eq:peps</sup> konsistent, falls  $F(u_{m,\varepsilon}, \varepsilon) \rightarrow 0$  für  $(\varepsilon \rightarrow 0)$ .

Wir stellen uns nun die Frage, wie die Koeffizienten und asymptotische Folge einer Entwicklung bestimmt werden können. Hierbei nehmen wir hier immer an, dass ein Problem eine Entwicklung besitzt (warum dies der Falls ist, ist eine andere Frage und wird hier nicht diskutiert). Wir betrachten 2 Methoden:

- Entwicklungsmethode: Hier ist die asymptotische Folge vorgegeben. In der Regel setzt man  $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$  an.
- Iterative Methode: Hier werden  $\varphi_k$  und  $a_k$  iterative bestimmt.

**Beispiel 2.9** (Entwicklungsmethode). Betrachte

$$0 = F(x_\varepsilon, \varepsilon) = x^2 - x + \frac{1}{4}\varepsilon.$$

(Die exakte Lösung ist  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\varepsilon}$ , was wir nachfolgend nicht verwenden möchten). Wir nehmen an, dass die Lösung  $x_\varepsilon$  eine asymptotische Entwicklung der Ordnung  $n$  mit  $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$  besitzt, d.h. mit

$$x_{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k$$

gilt  $x_\varepsilon = x_{n,\varepsilon} + o(\varepsilon^n)$ .

1. Lipschitz-Abschätzung. Behauptung: Es gilt

$$|F(x_{n,\varepsilon}, \varepsilon)| = o(\varphi_n) = o(\varepsilon^n).$$

Argument:

$$|F(x_{n,\varepsilon}, \varepsilon)| = |F(x_{n,\varepsilon}, \varepsilon) - F(x_\varepsilon, \varepsilon)| = |x_{n,\varepsilon}^2 - x_\varepsilon^2 - x_{n,\varepsilon} + x_\varepsilon| \leq (1 + |x_\varepsilon| + |x_{n,\varepsilon}|) |x_{n,\varepsilon} - x_\varepsilon|.$$

Es gilt  $x_{n,\varepsilon} = O(1)$ . Aus  $x_\varepsilon = x_{n,\varepsilon} + o(\varepsilon^n)$  folgt nun  $x_\varepsilon = O(1)$ . Also existiert  $C < \infty$  mit

$$|F(x_{n,\varepsilon}, \varepsilon)| \leq C |x_{n,\varepsilon} - x_\varepsilon| = o(\varphi_n) = o(\varepsilon^n).$$

2. Sei von nun an  $n = 2$  (um den Rechenaufwand zu reduzieren). Einsetzen der Näherung (und die Lipschitzabschätzung) führt auf die asymptotische Gleichung

$$o(\varepsilon^2) = F(x_{\varepsilon,2}, \varepsilon) = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)^2 - (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2) + \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Wir expandieren die rechte Seite, sortieren nach Potenzen von  $\varepsilon$  und absorbieren alle Terme der Ordnung  $o(\varepsilon^2)$  in die linke Seite:

$$o(\varepsilon^2) = (-a_0 + a_0^2)\varepsilon^0 + \varepsilon(2a_0a_1 - a_1 + \frac{1}{4}) + \varepsilon^2(2a_0a_2 + a_1^2)$$

Diese asymptotische Gleichung kann nur richtig sein, wenn alle Koeffizienten verschwinden, d.h.

$$-a_0 + a_0^2 = 0, \quad 2a_0a_1 - a_1 + \frac{1}{4} = 0, \quad 2a_0a_2 + a_1^2 = 0$$

Wir folgern

$$(a_0, a_1, a_2) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right) \text{ oder } (a_0, a_1, a_2) = \left(1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right).$$

Wir erhalten die beiden Näherungen

$$x_{2,\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{16}, \quad x_{2,\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Wir haben gezeigt: Falls  $x_\varepsilon$  eine asymptotische Näherung der Ordnung  $n = 2$  besitzt, so gilt  $x_\varepsilon = x_{2,\varepsilon} + o(\varepsilon^2)$ . Bemerkung: Vergleicht man die Entwicklungen mit der Taylorentwicklung der exakten Lösung  $x_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\varepsilon}$  (bzw.  $x_\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\varepsilon}$ ), so stellt man fest, d.h. die berechneten Näherungen gerade den ersten drei Terme der Taylorentwicklung entsprechen.

**Beispiel 2.10** (Entwicklungsmethode). Wir betrachten wieder

$$0 = F(x_\varepsilon, \varepsilon) = x^2 - x + \frac{1}{4}\varepsilon,$$

und nehmen an, dass die Lösung  $x_\varepsilon$  eine asymptotische Entwicklung besitzt und regulär gestört ist, d.h.  $x_\varepsilon = O(1)$ . Wir legen jedoch die asymptotische Folge nicht fest.

1. Wir bestimmen zunächst  $a_0 \neq 0$  und  $\varphi_0$ : Einsetzen von  $x_{0,\varepsilon} = a_0\varphi_0(\varepsilon)$  und Lipschitzabschätzung liefert

$$o(\varphi_0) = a_0^2\varphi_0(\varepsilon)^2 - a_0\varphi_0(\varepsilon) + \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Wir teilen durch  $\varphi_0$  und benutzen  $\frac{o(\varphi_0)}{\varphi_0} = o(1)$ . Es folgt die asymptotische Gleichung

$$o(1) = a_0^2\varphi_0(\varepsilon) - a_0 + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\varphi_0(\varepsilon)}.$$

Wegen  $a_0 \neq 1$ , ergeben sich zwei hinreichende Bedingungen:

(a)  $a_0^2\varphi_0(\varepsilon) - a_0 = 0$  und  $\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\varphi_0(\varepsilon)} = o(1)$ . Also

$$a_0 = 1 \text{ und } \varphi_0(\varepsilon) = 1.$$

(b)  $a_0^2\varphi_0(\varepsilon) = o(1)$  und  $-a_0 + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\varphi_0(\varepsilon)} = 0$ . Also

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad \varphi_0(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Wir erhalten die Näherungen

$$x_{0,\varepsilon} = 1 \text{ und } x_{0,\varepsilon} = \frac{1}{4}\varepsilon.$$

2. Zur Bestimmung von  $a_1$  und  $\varphi_1$  wiederholen wir das Vorgehen. Sei Beispielsweise  $a_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\varphi_0(\varepsilon) = \varepsilon$ . Einsetzen von  $x_{1,\varepsilon} = \frac{1}{4}\varepsilon + a_1\varphi_1(\varepsilon)$  und Lipschitzabschätzung liefert

$$\begin{aligned} o(\varphi_1) &= \left(\frac{1}{4}\varepsilon + a_1\varphi_1(\varepsilon)\right)^2 - \frac{1}{4}\varepsilon - a_1\varphi_1(\varepsilon) + \frac{1}{4}\varepsilon \\ &= \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_1\varepsilon\varphi_1(\varepsilon) + a_1\varphi_1^2(\varepsilon) - a_1\varphi_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Wegen  $\varphi_1 = o(\varphi_0) = o(\varepsilon)$  gilt  $\varphi_1^2 = o(\varphi_1)$  und  $\varepsilon\varphi_1(\varepsilon) = o(\varphi_1)$ . Wir können daher den zweiten und dritten absorbieren und erhalten

$$o(\varphi_1) = \frac{1}{16}\varepsilon^2 - a_1\varphi_1(\varepsilon),$$

bzw.

$$o(1) = \frac{1}{16} \frac{\varepsilon^2}{\varphi_1(\varepsilon)} - a_1.$$

Also  $\varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon^2$  und  $a_1 = \frac{1}{16}$ .

Insgesamt haben wir die Näherung

$$x_{1,\varepsilon} = \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{16}\varepsilon^2$$

bestimmt.

**Definition 2.11.** Seien  $f, \varphi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow X$ ,  $X$  normierter Raum. Wir betrachten die asymptotische Gleichung

$$f + \varphi = o(1).$$

Wir nennen  $f = o(1)$  führende Gleichung, falls  $\varphi = o(f)$ .

Als nächstes ein singular gestörtes Problem:

**Beispiel 2.12.** Wir betrachten

$$0 = F(x_\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon x^2 - 2x + 1.$$

mit exakten Lösungen  $x_\varepsilon^{(1,2)} = \frac{1}{\varepsilon} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$ . Die Lösung  $x_\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$  konvergiert gegen  $\frac{1}{2}$ . Die andere Lösung  $x_\varepsilon^{(1)}$  divergiert. Der reguläre Störungsansatz mit  $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$  führt nur zu asymptotischen Entwicklungen zu  $x_\varepsilon^{(2)}$ . Für  $x_\varepsilon^{(1)}$  ist das Problem singular gestört. Wir modifizieren die iterative Methode:

**Iterative Methode** (für singular Störung): Wir bestimmen iterativ  $a_k \neq 0, \varphi_k$  nach folgendem Vorgehen. Zunächst  $k = 0$ :

1. Einsetzen von  $x_{0,\varepsilon} = a_0\varphi_0(\varepsilon)$  liefert

$$\varepsilon a_0^2 \varphi_0^2(\varepsilon) - 2a_0\varphi_0(\varepsilon) + 1 = 0.$$

2. Wir bestimmen nun  $\varphi_0(\varepsilon)$  und  $a_0$ , so dass

$$F(a_0\varphi_0, \varepsilon) = o(\varphi_0).$$

Hierzu wählen wir  $\varphi_0$ , so dass die führende Gleichung eine nicht-triviale Lösung  $a_0 \neq 0$  ergibt.

(a) Falls  $\varepsilon a_0^2 \varphi_0^2$  führend, dann folgt  $a_0 = 0$  (verwerfen)

(b) Falls  $-2a_0\varphi_0$  führend, dann folgt  $a_0 = 0$  (verwerfen)

(c) 1 kann nicht führend sein

(d) Falls  $\varepsilon a_0^2 \varphi_0^2 - 2a_0\varphi_0(\varepsilon)$  führend, dann folgt  $\varphi_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $a_0 \neq 0$ , und es gilt in der Tat  $1 = o(\varphi_0)$ .

(e) Falls  $\varepsilon a_0^2 \varphi_0^2 + 1$  führend, dann folgt  $\varphi_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ , aber  $\varphi_0 \neq o(\varphi_0)$  (verwerfen).

(f) Falls  $-2a_0\varphi_0(\varepsilon) + 1$  führend, dann folgt  $\varphi_0(\varepsilon) = 1$ ,  $a_0 \neq 0$ , und es gilt in der Tat  $\varepsilon a_0^2 \varphi_0^2 = o(\varphi_0)$ .

Wir haben zwei Möglichkeiten ermittelt:  $\varphi(\varepsilon) = 1$  und  $\varphi_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ .

3. Betrachte nun  $y_\varepsilon = \frac{1}{\varphi_0(\varepsilon)}x_\varepsilon$  und bestimme eine reguläre Asymptotische Entwicklung für  $y_\varepsilon$ . Beispielsweise für  $\varphi_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ . Beachte:

$$0 = F(x_\varepsilon, \varepsilon) = F(\varphi_0(\varepsilon)y_\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}y_\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon}2y_\varepsilon + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_\varepsilon^2 - 2y_\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Dies ist ein regulär gestörtes Problem. Eine asymptotische Entwicklung zur Ordnung 0 ist gegebene durch

$$y_{0,\varepsilon} = 2.$$

Wir erhalten

$$x_\varepsilon = \varphi_0(\varepsilon)y_\varepsilon = \varphi_0(\varepsilon)(2 + o(1)) = \frac{2}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Wir betrachten nun eine parametrisierte gewöhnliche Differentialgleichung

**Beispiel 2.13** (Senkrechter Wurf). Für  $0 < \varepsilon \ll 1$  betrachten wir

$$\ddot{u}_\varepsilon = -(\varepsilon u_\varepsilon(t) + 1)^{-2}, \quad u_\varepsilon(0) = 0, \quad u'_\varepsilon(0) = 1.$$

Wir nehmen an, dass  $u_\varepsilon$  eine asymptotische Entwicklung mit regulärem Ansatz (der Ordnung  $m$ ) besitzt, d.h.

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^m u_k(t)\varepsilon^k + \text{rest}_m(t, \varepsilon),$$

mit

$$u_k \in X := C^2([0, T]), \quad \|\text{rest}_m(\cdot, \varepsilon)\|_X = o(\varepsilon^m).$$

1. Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

Die Gleichung ergibt (für alle  $t \in [0, T]$ )

$$\sum_{k=0}^m \ddot{u}_k(t) \varepsilon^k = -(\varepsilon \sum_{k=0}^m u_k(t) \varepsilon^k + 1)^{-2}$$

Wir benutzen die Taylorentwicklung

$$-(z + 1)^{-2} = -1 + 2z - 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

mit  $z = \varepsilon(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots)$  und erhalten

$$\sum_{k=0}^m \ddot{u}_k(t) \varepsilon^k = -1 + 2\varepsilon(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots) - 3\varepsilon^2(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots)^2 + \dots$$

Insbesondere für  $m = 2$ :

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 = -1 + \varepsilon 2u_0 + \varepsilon^2(2u_1 - 3u_0) + o(\varepsilon^2).$$

Für die Anfangswerte erhalten wir

$$u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_0(0) + \varepsilon \dot{u}_1(0) + \varepsilon^2 \dot{u}_2(0) = 1.$$

2. Ein Koeffizientenvergleich dieser Entwicklungen liefert eine Folge gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (\varepsilon^0) \quad & \ddot{u}_0 = -1, \quad u_0(0) = 0, \quad \dot{u}_0(0) = 1, \\ (\varepsilon^1) \quad & \ddot{u}_1 = 2u_0, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0, \\ (\varepsilon^2) \quad & \ddot{u}_2 = 2u_1 - 3u_0, \quad u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0. \end{aligned}$$

3. Iteratives Lösen der Differentialgleichungen führt auf

$$u_0(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad u_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4, \quad u_2(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{60}t^6.$$

Wir erhalten die Näherung

$$u_{2,\varepsilon}(t) = t - \frac{t^2}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6\right),$$

und erwarten, dass

$$\|u_\varepsilon - u_{2,\varepsilon}\|_{C^2[0,T]} = o(\varepsilon^2).$$

**Beispiel 2.14.** Für  $0 < \varepsilon \ll 1$  betrachten wir wieder

$$\ddot{u}_\varepsilon = -(\varepsilon u_\varepsilon(t) + 1)^{-2}, \quad u_\varepsilon(0) = 0, \quad u'_\varepsilon(0) = 1.$$

Wir stellen eine zweite Methode vor eine asymptotische Näherung zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Abbildung

$$u : [0, T] \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, \varepsilon) := u_\varepsilon(t),$$

wobei  $u_\varepsilon$  obiges Problem löst. Man kann zeigen, dass die Abbildung  $\varepsilon \mapsto u(\cdot, \varepsilon) \in C^2([0, T])$  mehrfach stetig differenzierbar ist. Dies motiviert die verallgemeinerten Taylorentwicklung

$$u(t, \varepsilon) = u(t, 0) + \varepsilon \partial_\varepsilon u(t, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_\varepsilon^2 u(t, 0) + \dots$$

zu betrachten.  $u(t, 0)$  entspricht gerade dem Koeffizienten  $u_0$  aus obiger Betrachtung. Wir bestimmen  $\partial_\varepsilon u(t, 0)$  durch eine formale Rechnung:

$$v(t, \varepsilon) := \frac{u(t, \varepsilon) - u(t, 0)}{\varepsilon}.$$

Im Grenzwert erhalten wir (formal)  $v(t, \varepsilon) \rightarrow \partial_\varepsilon u(t, 0)$  ( $\varepsilon \downarrow 0$ ). Weiter gilt

$$\ddot{v}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (\ddot{u}(t, \varepsilon) - \ddot{u}(t, 0)) = \frac{1}{\varepsilon} (-\varepsilon u(t, \varepsilon) + 1)^2 + 1 = \frac{1}{\varepsilon} (2\varepsilon u(t, \varepsilon) + o(\varepsilon)) = 2u(t, \varepsilon) + o(1).$$

Grenzübergang (und vertauschen von  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\partial_t^2$ ) führt auf

$$\partial_t^2 \partial_\varepsilon u(t, 0) = 2u(t, 0), \quad v(0, 0) = 0, \quad \dot{v}(0, 0) = 0.$$

Damit ist  $\partial_\varepsilon u$  gerade der Koeffizient  $u_1$  aus obiger Betrachtung.

**Beispiel 2.15.** Für  $0 < \varepsilon \ll 1$  betrachte

$$F(u, \varepsilon) := \begin{pmatrix} \ddot{u} + (\varepsilon u + 1)^{-2} \\ u(0) \\ \dot{u}(0) - 1 \end{pmatrix}, \quad F : C^2[0, T] \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow C[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

$F$  ist Lipschitz stetig uniform in  $\varepsilon$ , d.h.

$$\|F(u, \varepsilon) - F(v, \varepsilon)\| \leq L \|u - v\| \quad \text{for all } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Weiter gilt  $F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0$  genau dann, wenn  $u_\varepsilon$  den Senkrechten Wurf aus den vorangegangenen Beispielen löst.

Wir nehmen an, dass  $u_\varepsilon$  eine asymptotische Entwicklung mit regulärem Störungsansatz besitzt, d.h.

$$u_\varepsilon = \sum_{k=0}^m u_k \varepsilon^k + o(\varepsilon^m).$$

1. Lipschitzabschätzung:

$$\|F(u_{m,\varepsilon}, \varepsilon)\| \leq L \|u_{m,\varepsilon} - u_\varepsilon\| = o(\varepsilon^m).$$

2. Die Koeffizienten  $u_k$  können nun (rigoros) durch Einsetzen der Entwicklung und Koeffizientevergleich wie im ersten Beispiel bestimmt werden.

### 3 Mehrskalprobleme

In diesem Abschnitt betrachten wir Modelle, in denen mehrere (=zwei) (Längen oder Zeit)skalen auftreten.

### 3.1 Homogenisierung

Consider a heat conducting body that occupies some domain  $O \subset \mathbb{R}^d$ , where  $d = 1, 2, \dots$  denotes the dimension. Suppose that the body is exposed to a heat source/sink that does not vary in time, and suppose that the body is cooled at its boundary, such that its temperature is zero at the boundary. In non-dimensional form, this problem can be described as follows:

- $x \in \mathbb{R}^d$  spatial variable
- $t \geq 0$  time variable
- $v(t, x)$  temperature
- $v_0(x)$  initial temperature
- $f(x)$  heat source

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) - \nabla \cdot (a(x) \nabla v(t, x)) &= f(x) & t > 0, x \in O \\ v(t, x) &= 0 & t > 0, x \in \partial O \\ v(t = 0, x) &= v_0(x) & x \in O. \end{aligned}$$

The ability of the material to conduct heat is described by a material parameter  $a \in (0, \infty)$ , called the *conductivity*.

If time evolves the temperature of the body will converge to a steady state, which can be described by the elliptic boundary value problem

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad \text{in } O, \tag{3.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial O. \tag{3.2}$$

Indeed, consider  $w(t, x) := v(t, x) - u(x)$ , then

$$\partial_t w(t, x) - \nabla \cdot (a \nabla w) = 0, \quad w = 0 \text{ on } \partial O, \quad w(0, \cdot) = u_0,$$

and thus

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_O |w(t, x)|^2 = - \int_O \nabla w(t, x) \cdot a(x) \nabla w(t, x) dx \leq - \min a \int_O |\nabla w(t, x)|^2 dx.$$

If  $\min a > 0$ , this suggests that  $\int_O |w(t, x)|^2 \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  (which can be shown, e.g. if  $v_0 \in L^2(\Omega)$ ). Hence,  $v(t, \cdot) \rightarrow u$  as  $t \rightarrow \infty$ .

The material is *homogeneous*, if  $a$  does not depend on  $x$ . The material is called *heterogeneous*, if  $a(x)$  varies in  $x \in O$ . We are interested in heterogeneous materials with *microstructure*, which means that the heterogeneity varies on a length scale, called the *microscale*, that is much smaller than a *macroscopic* length scale of the problem, e.g. the diameter of the domain  $O$  or the length scale of the right-hand side  $f$ .

To fix ideas, suppose that

- $O = (0, L)^d$ ,

- $f \equiv 1$ ,
- $a(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi \frac{x_1}{\ell})$ ,

i.e. the conductivity is periodic with the period  $\ell$ . If the ratio

$$\varepsilon := \frac{\text{microscale}}{\text{macroscale}} = \frac{\ell}{L}$$

is a small number, e.g.  $\varepsilon \lesssim 10^{-3}$ , then we are in the regime of a microstructured material. The goal of homogenization is to derive a simplified PDE by studying the limit  $\varepsilon \downarrow 0$ , i.e. when the micro- and macroscale separate.

In the rest of the introduction we treat the following one-dimensional example: Let  $O = (0, L) \subset \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  and let  $u_\varepsilon : O \rightarrow \mathbb{R}$  be a solution to the equation

$$-\partial_x(a(\frac{x}{\varepsilon})\partial_x u_\varepsilon(x)) = f \quad \text{in } O, \quad (3.3)$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial O. \quad (3.4)$$

We suppose that  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is 1-periodic and uniformly elliptic, i.e. there exists  $\lambda > 0$  such that  $a(x) \in (\lambda, 1)$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . For simplicity, we assume that  $f$  and  $a$  are smooth.

**Lemma 3.1.**  $(\text{I:1})$  und  $(\text{I:2})$  besitzen eine eindeutige glatte Lösung und es gilt:

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x a_\varepsilon^{-1}(x') \left( c_\varepsilon - \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) dx'. \quad (3.5) \quad \boxed{\text{I:6}}$$

mit

$$c_\varepsilon = \left( \int_0^L a_\varepsilon^{-1}(x') dx' \right)^{-1} \int_0^L \int_0^{x'} a_\varepsilon^{-1}(x') f(x'') dx'' dx'. \quad (3.6) \quad \boxed{\text{I:5}}$$

*Beweis.* We first assume that a smooth solution  $u_\varepsilon$  exists and derive an explicit representation for  $u_\varepsilon$ . We then show that the representation defines a smooth solution. For simplicity we set  $a_\varepsilon := a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ . By the fundamental theorem of calculus we have

$$u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0) = \int_0^x \partial_x u_\varepsilon(x') dx' = \int_0^x a_\varepsilon^{-1}(x') j_\varepsilon(x') dx',$$

where  $j_\varepsilon$  denotes the flux

$$j_\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_x u_\varepsilon(x).$$

From  $(\text{I:1})$  we learn that

$$j_\varepsilon(x) = c_\varepsilon - \int_0^x f(x') dx'$$

for a constant  $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ , which is uniquely determined by  $(\text{I:2})$ : Indeed, we have

$$\begin{aligned} 0 = u_\varepsilon(L) - u_\varepsilon(0) &= \int_0^L a_\varepsilon^{-1}(x') j_\varepsilon(x') dx' \\ &= \int_0^L a_\varepsilon^{-1}(x') \left( c_\varepsilon - \int_0^{x'} f(x'') dx'' \right) dx', \end{aligned}$$

and thus we get (I:5). Since  $u_\varepsilon(L) = 0$ , we get the representation (I:6). Since  $f$  and  $a_\varepsilon$  are smooth (by assumption), the right-hand side defines a smooth solution to (I:1) and (I:2).  $\square$

Next, we want to pass to the limit  $\varepsilon \downarrow 0$  in the representation (I:6). In order to do so, we need to understand the limit of functions of the form

$$x \mapsto \frac{1}{a(\frac{x}{\varepsilon})} \int_0^x f(x') dx'.$$

This function rapidly oscillates on scale  $\varepsilon$  and the amplitude of the oscillations is of unit order. Hence, the expression does not converge uniformly (or in a strong sense). Nevertheless, we have the following result:

**P2** **Lemma 3.2.** *Let  $F(y, x)$  be a smooth function that is periodic in  $y \in \mathbb{R}$  and assume that  $F$  and  $\partial_x F$  are bounded. Show that*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^b F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) dx = \int_a^b \bar{F}(x) dx, \quad \bar{F}(x) = \int_0^1 F(y, x) dy.$$

Furthermore, show that there exists a constant  $C$  (only depending on  $F$ ) such that

$$\left| \int_a^b F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) - \bar{F}(x) dx \right| \leq C(|b - a| + 1)\varepsilon.$$

*Beweis.* Consider the functions

$$G(y, x) = \int_0^y (F(y', x) - \bar{F}(x)) dy', \quad g_\varepsilon(x) := \varepsilon G\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right).$$

Note that  $G(y, x)$  and  $\partial_x G(y, x)$  are periodic in  $y$ ; indeed, we have

$$G(y + 1, x) - G(y, x) = \int_y^{y+1} F(y', x) - \bar{F}(x) dy' = \bar{F}(x) - \bar{F}(x) = 0,$$

and the same is true for  $\partial_x G$ . Furthermore,  $G$  and  $\partial_x G$  are smooth and bounded, and we have

$$\partial_x g_\varepsilon(x) = \varepsilon \partial_x G\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + \partial_y G\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) = \varepsilon \partial_x G\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + (F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) - \bar{F}(x)),$$

and thus

$$\begin{aligned} \int_a^b F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) - \bar{F}(x) dx &= \int_a^b \partial_x g_\varepsilon(x) - \varepsilon \partial_x G\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \varepsilon \left( G\left(\frac{b}{\varepsilon}, b\right) - G\left(\frac{a}{\varepsilon}, a\right) - \int_a^b \partial_x G\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) dx \right). \end{aligned}$$

The expression in the brackets is bounded uniformly in  $\varepsilon$  (by smoothness and periodicity of  $G$  and  $\partial_x G$ ), and thus the statement follows.  $\square$

**Satz 3.3.** *Sei  $f$  glatt.*

(a) For all  $\varepsilon > 0$  equation  $(\text{I:1})$ ,  $(\text{I:2})$  admits a unique smooth solution  $u_\varepsilon$ .

(b) As  $\varepsilon \downarrow 0$ ,  $u_\varepsilon$  converges to a smooth function  $u_0$ .

(c) The limit  $u_0$  is the unique solution to the equation

$$-\partial_x(a_0\partial_x u_0) = f \quad \text{in } O, \tag{3.7}$$

$$u_0 = 0 \quad \text{on } \partial O, \tag{3.8}$$

where  $a_0 \in \mathbb{R}$  denotes the harmonic mean of  $a$ , i.e.

$$a_0 = \left( \int_0^1 a^{-1}(y) dy \right)^{-1}.$$

The physical interpretation of the result of Problem  $\text{P3}$  is the following: While the initial problem  $(\text{I:1})$  &  $(\text{I:2})$  describes a heterogeneous, microstructured material (a periodic composite with period  $\varepsilon$ ), the limiting equation  $(\text{I:3})$  &  $(\text{I:4})$  describes a homogeneous material with conductivity  $a_0$ . Hence, Problem  $\text{P2}$  states that if we observe a material with a rapidly oscillating conductivity  $a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$  on a macroscopic length scale, then it behaves like a homogeneous material with effective conductivity given by  $a_0$ . We therefore call  $(\text{I:3})$  &  $(\text{I:4})$  the homogenized problem. It is much simpler than the heterogeneous initial problem  $(\text{I:1})$  &  $(\text{I:2})$ :

**Problem 3.1.** Let  $f \equiv 1$ . Show that a solution to

$$\begin{aligned} -\partial_x(a\partial_x u) &= 1 & \text{in } O, \\ u &= 0 & \text{on } \partial O. \end{aligned}$$

is a quadratic function, if and only if the material is homogeneous, i.e. iff  $a$  does not depend on  $x$ .

*Beweis.* Recall that  $u$  admits the representation

$$u(x) = \int_0^x a^{-1}(x')(c - x') dx'.$$

for some  $c \in \mathbb{R}$ . Hence,  $u'(x) = \frac{c-x}{a(x)}$  and thus

$$u \text{ is quadratic} \Leftrightarrow u' \text{ is affine} \Leftrightarrow a(\cdot) \text{ is a constant.}$$

□

The homogenization result shows that  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  as  $\varepsilon \downarrow 0$ . Hence, for  $\varepsilon \ll 1$  the function  $u_0$  is a consistent approximation to the solution to  $(\text{I:1})$  &  $(\text{I:2})$ . We even have a rate:

**P3** **Lemma 3.4.** Es gilt  $\max_{x \in O} |u_\varepsilon(x) - u_0(x)| \leq C\varepsilon$  where  $C$  only depends on  $O, f$  and  $a$ .

*Beweis.* Application of Lemma [P2](#) [3.2](#) yields

$$\begin{aligned} \int_0^L a_\varepsilon^{-1} &= a_0^{-1}L + O(\varepsilon), \text{ where } a_0 = \left(\int_0^1 a^{-1}\right)^{-1} \\ c_\varepsilon &= c_0 + O(\varepsilon) \text{ where } c_0 := a_0 \int_0^L a_0^{-1} \int_0^{x'} f(x'') dx'' dx' = \int_0^L \int_0^{x'} f(x'') dx'' dx', \\ u_\varepsilon(x) &\rightarrow \tilde{u}_0(x) + O(\varepsilon) \text{ where } \tilde{u}_0(x) := a_0^{-1} \int_0^x (c_0 - \int_0^{x'} f(x'') dx'') dx', \end{aligned}$$

Finally, it is easy to check that  $\tilde{u}_0$  solves [\(3.7\)](#) and [\(3.8\)](#), and thus  $\tilde{u}_0 = u_0$ .  $\square$

Thanks to the homogenization result certain properties of the difficult equation [\(3.3\)](#) & [\(3.4\)](#) can be studied by analyzing the simpler problem [\(3.7\)](#) & [\(3.8\)](#): [\(1.1\)](#) & [\(1.2\)](#)

**Problem 3.2.** Let  $f \equiv 1$  and  $L = 1$ . Show that  $M_\varepsilon := \max_{\bar{O}} u_\varepsilon = \frac{1}{8a_0} + O(\varepsilon)$ .

*Beweis.* We first notice that  $M_0 := \max_{\bar{O}} u_0 = \frac{1}{8a_0}$ . Indeed, this follows from

$$u_0(x) = a_0^{-1} \int_0^x \left(\frac{1}{2} - x'\right) dx'.$$

We conclude by appealing to the quantitative homogenization result  $\max_{\bar{O}} |u_\varepsilon - u_0| = O(\varepsilon)$ :

$$M_\varepsilon \geq u_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = u_0\left(\frac{1}{2}\right) + O(\varepsilon) = M_0 + O(\varepsilon),$$

and for some  $x_\varepsilon$  we have

$$M_\varepsilon = u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u_0(x_\varepsilon) + O(\varepsilon) \leq M_0 + O(\varepsilon).$$

Hence,  $M_\varepsilon = M_0 + O(\varepsilon)$ .  $\square$

What can be said about the convergence of the temperature gradient  $u'_\varepsilon$ ?

**Problem 3.3.** Show that  $\limsup \int_O |\partial_x u_\varepsilon - \partial_x u_0|^2 > 0$  (unless the initial material is homogeneous). Show on the other hand, that for all smooth functions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  we have

$$\int_O u'_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_O u'_0(x) \varphi(x) dx$$

*i.e.* we have weak convergence, but not strong convergence.

*Beweis.* We argue by contradiction and assume that (for a subsequence)

$$\int_O |\partial_x u_\varepsilon - \partial_x u_0|^2 \rightarrow 0,$$

which implies that  $\partial_x u_\varepsilon(x) \rightarrow \partial_x u_0(x)$  for a.e.  $x \in O$  for a subsequence. The representation formula and a direct computation shows that

$$u'_\varepsilon(x) = \frac{(c_\varepsilon - x)}{a_\varepsilon(x)} \quad u'_0(x) = \frac{(c_0 - x)}{a_0}$$

Since  $c_\varepsilon \rightarrow c_0$  (as shown in the proof of Problem <sup>P3</sup>3.4), we deduce that  $\frac{1}{a_\varepsilon(x)} \rightarrow \frac{1}{a_0}$  for a.e.  $x \in O$ . Combined with the dominated convergence theorem, we conclude that  $\frac{1}{a_\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{a_0}$  in  $L^2(O)$ , and thus  $\int_O a_\varepsilon dx \rightarrow \int_O a_0 dx$ . However, by Problem <sup>P2</sup>3.2 we have

$$\int_O a_\varepsilon dx \rightarrow \int_O \int_0^1 a dy dx \neq \int_O a_0 dx \quad \text{unless } a \text{ is a constant function.}$$

The second statement is a direct consequence of an integration by parts and Problem <sup>P3</sup>3.4.  $\square$

Yet, we can modify  $u_0$  by adding oscillations, such that the gradient of the modified functions converges:

**Int:L2**

**Lemma 3.5.** *Let  $a, f$  be smooth,  $O = (0, 1)$ . Let  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denote a 1-periodic solution to*

$$\partial_y(a(y)(\partial_y\phi(y) + 1)) = 0 \tag{3.9}$$

**corr:1dim**

with  $\phi(0) = 0$ . Let  $u_0$  and  $u_\varepsilon$  be as above. Consider

$$v_\varepsilon(x) := u_0(x) + \varepsilon\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_x u_0(x).$$

Then there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $\varepsilon > 0$  with  $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  we have

$$\int_O |u_\varepsilon - v_\varepsilon|^2 + |\partial_x u_\varepsilon - \partial_x v_\varepsilon|^2 \leq \left(\frac{4}{\lambda} \max |\phi|^2\right) \varepsilon^2 \int_O |\partial_x^2 u_0|^2.$$

*Beweis.* To ease notation we write

$$a_\varepsilon(x) := a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \phi_\varepsilon(x) := \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

**#1:**

It can be easily checked (by direct calculations) that

$$\phi(y) := \int_0^y \frac{a_0}{a(t)} - 1 dt$$

and that  $\phi$  is smooth and bounded. Note that

$$a_0 = a(y)(\partial_y\phi(y) + 1) \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}.$$

Indeed, by the corrector equation (<sup>corr:1dim</sup>3.9) and the definition of  $a_0$  the difference of both functions is constant and has zero mean. (This is only true in the one-dimensional case!)

**#2:**

Set  $z_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon$ . Since  $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  we have  $\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$ . Combined with the boundary conditions imposed on  $u_\varepsilon$  and  $\phi_\varepsilon$  we conclude that  $z_\varepsilon(0) = z_\varepsilon(1) = 0$ . We claim that

$$\int_O |z_\varepsilon|^2 \leq \int_O |\partial_x z_\varepsilon|^2.$$

Indeed, since  $O = (0, 1)$  and  $z_\varepsilon = 0$  on  $\partial O$ , this follows by Poincaré's inequality:

$$\int_0^1 |z_\varepsilon|^2 = \int_0^1 \left( \int_0^x \partial_x z_\varepsilon \right)^2 \leq \int_0^1 |\partial_x z_\varepsilon|^2.$$

Hence,

$$\int_O |z_\varepsilon|^2 + |\partial_x z_\varepsilon|^2 \leq 2 \int_O |\partial_x z_\varepsilon|^2 \leq \frac{2}{\lambda} \int_O |\partial_x z_\varepsilon|^2 a_\varepsilon,$$

where we used that  $a_\varepsilon \geq \lambda$  by assumption. Since  $z_\varepsilon = 0$  on  $\partial O$ , we may integrate by parts and get

$$\int_O |z_\varepsilon|^2 + |\partial_x z_\varepsilon|^2 \leq \frac{2}{\lambda} \int_O z_\varepsilon (-\partial_x (a_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon)).$$

**#3:** We compute  $(-\partial_x (a_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon))$ :

$$\begin{aligned} \partial_x z_\varepsilon &= \partial_x u_\varepsilon - \left( \partial_y \phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + 1 \right) \partial_x u_0 - \varepsilon \phi_\varepsilon \partial_x^2 u_0 \\ &\quad \text{use } a_0 = a_\varepsilon \left( \partial_y \phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + 1 \right) \\ a_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon &= a_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - a_0 \partial_x u_0 - \varepsilon a_\varepsilon \phi_\varepsilon \partial_x^2 u_0 \\ -\partial_x (a_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon) &= -\partial_x (a_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon) + \partial_x (a_0 \partial_x u_0) + \partial_x (\varepsilon a_\varepsilon \phi_\varepsilon \partial_x^2 u_0). \end{aligned}$$

The first two terms on the right-hand side are equal to the left-hand side of the PDEs for  $u_\varepsilon$  and  $u_0$ . Hence, these two terms evaluate to  $f - f = 0$ :

$$-\partial_x (a_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon) = \partial_x (\varepsilon a_\varepsilon \phi_\varepsilon \partial_x^2 u_0).$$

Combined with the estimate of Step 2 we deduce that

$$\begin{aligned} \int_O |z_\varepsilon|^2 + |\partial_x z_\varepsilon|^2 &\leq \frac{2}{\lambda} \int_O z_\varepsilon \partial_x (\varepsilon a_\varepsilon \phi_\varepsilon \partial_x^2 u_0) \\ &\quad \text{integration by parts} \\ &= \int_O \partial_x z_\varepsilon (\varepsilon \phi_\varepsilon a_\varepsilon \partial_x^2 u_0) \\ &\quad \text{Cauchy-Schwarz and Young's inequality} \\ &\quad \text{in the form } ab \leq \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2 \text{ with } \delta = \frac{\lambda}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_O |\partial_x z_\varepsilon|^2 + \frac{2}{\lambda^2} \varepsilon^2 \int_O |\phi_\varepsilon|^2 |a_\varepsilon|^2 |\partial_x^2 u_0|^2, \end{aligned}$$

and thus

$$\int_O |z_\varepsilon|^2 + |\partial_x z_\varepsilon|^2 \leq \frac{4}{\lambda^2} \varepsilon^2 \int_O |\phi_\varepsilon|^2 |\partial_x^2 u_0|^2.$$

□