Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 1 | Wintersemester 2013/2014 | 17.10.2013

Aufgabe 1

2 Punkte

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) := \ln(|x|), \qquad (\text{ wobei } |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ )$$

erfüllt $\triangle u(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.
Hinweis: Polarkoordinaten sind von Nutzen.

(b) Es bezeichne Z eine Menge von endlich vielen Punkten im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus Z \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \sum_{z \in Z} \ln(|z||z - x|)$$

ist harmonisch auf $\mathbb{R}^2 \setminus Z$, d.h. $\triangle u(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus Z$.

Aufgabe 2

4 Punkte

Sie $c > 0$.

(a) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) := f(x - ct) + g(x + ct) \tag{1}$$

die Wellengleichung

$$\partial_{tt}^2 u(x,t) = c^2 \partial_{xx}^2 u(x,t) \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x_1, x_2) = 0$$

ist, wenn es Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ gibt, so dass

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2).$$

(c) Es erfülle $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die Wellengleichung (2). Dann besitzt u die Darstellung (1) mit $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $c = 1$ und die Funktion $v(y,s) := u(y + s, y - s)$