Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 10 — Wintersemester 2013/2014 — 17.12.2013

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Der Klausurtermin ist vorläufig auf den **12. Februar 2014, 10-12 Uhr** festgesetzt.

Aufgabe 1 — **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Betrachten Sie die folgenden Konvergenzbegriffe

(i) $u_n \to 0$ lokal gleichmäßig in Ω, d.h. $\forall K \subset\subset \Omega$ gilt $\sup_{x \in K} |u_n(x)| \to 0$

(ii) $u_n \to 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$

(iii) $u_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Zeigen Sie:

(a) Für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ gilt die Implikation (i)$\Rightarrow$(ii). Aus (ii) folgt im Allgemeinen nicht (i).

(b) Für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ gilt die Implikation (ii)$\Rightarrow$(iii). Aus (iii) folgt im Allgemeinen nicht (ii).
Hinweis: Wie in der Vorlesung vereinbart, identifizieren wir $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ "stillschweigend" mit der regulären Distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Insbesondere bedeuted die Aussage " $u_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$" für ein Funktionenfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, dass die zugehörige Distributionenfolge T_{u_n} im distributionellen Sinn gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 2 — **2+1+1+2 Punkte**

(a) Beweisen Sie: Durch $\langle T, \varphi \rangle := \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx$ wird eine Distribution of $\mathbb{R}$ definiert.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Identität $\varphi(x) - \varphi(-x) = x \int_{-1}^1 \varphi'(sx)\, ds$. Benutzen Sie Lemma 3.15.

(b) Für $\varepsilon > 0$ wird durch $f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & |x| > \varepsilon \\ 0 & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$ eine Folge von Funktionen $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definiert. Es bezeichne T die in (a) definierte Distribution. Beweisen Sie:

$$f_\varepsilon \to T \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

(c) Betrachten sie $f(x) := \log |x|$. Zeigen Sie: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. *(Hinweis: $(x \log x - x)' = \log x$.)*

(d) Seien T und f wie in (a) und (c). Zeigen Sie $f' = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3 — **2 Punkte**

Es bezeichne T_n eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und φ_n eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Beweisen Sie: Falls $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, dann gilt $\langle T_n, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$. *(Hinweis: Benutzen Sie Satz 3.22.)*

Aufgabe 4 — **2 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Es bezeichne Φ die Fundamentallösung zu $-\triangle$ und δ die Dirac-Distribution auf $\mathbb{R}^d$ im Punkt 0. Beweisen Sie: $-\triangle \Phi = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Das PDE-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2014!

Abgabe bis Dienstag 7.01.2014, 9.15 Uhr (Briefkasten)
`http://www.wias-berlin.de/people/neukamm/PDE/`