Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 11 Wintersemester 2013/2014 7.01.2014

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Aufgabe 1 **1+1+2 Punkte**

Sei $c \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^2$ wird durch

$$P(D) = \triangle(c\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2) = \sum_{k=1}^{2} c\partial_{kk11}^4 + \partial_{kk22}^4$$

ein Differentialoperator definiert.

(a) Geben Sie die Ordnung von $P(D)$ an.

(b) Geben Sie das Hauptsymbol von $P(D)$ als Polynom in $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ an.
Hinweis: In der Vorlesung wurde das Hauptsymbol im Fall $c = 1$ fehlerhaft angegeben.

(c) $P(D)$ heißt elliptisch, falls das Hauptsymbol nur die triviale Nullstelle $(\xi_1, \xi_2) = 0$ besitzt. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $P(D)$ elliptisch?

Aufgabe 2 **2+2+2 Punkte**

Betrachten Sie die lokal integrierbare Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie f' und zeigen Sie, dass f' nicht lokal integrierbar auf $(-1, 1)$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass durch

$$\langle S, \varphi \rangle := \int_{-1}^{1} 2x \sin(\frac{1}{x^2})\varphi(x)\,dx - 2\int_{0}^{1} \cos(\frac{1}{x^2})\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx$$

eine Distribution auf $(-1, 1)$ definiert wird.

(c) Beweisen Sie:

$$(T_f)' = S \qquad \text{in } \mathcal{D}'((-1, 1)).$$

Aufgabe 3 – Wärmeleitungskern **2+2+3+1 Punkte**

Sei $d \geq 1$. Betrachten Sie den Wärmeleitungskern

$$G(t,x) := \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d,\ t \leq 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) G ist lokal integrierbar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x)\,dx = 1 \qquad \text{für alle } t > 0.$$

(b) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} G(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\,dx = \varphi(0,0).$$

(c) Es gilt

$$(\partial_t - \triangle_x)G = \delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d),$$

wobei δ die Dirac-Distribution im Punkt $(t = 0, x = 0)$ bezeichnet.
Hinweis: Partielle Integration auf $(\varepsilon, \infty) \times \mathbb{R}^d$

(d) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Es existiert $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ mit

$$\partial_t u - \triangle_x u = f \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$