Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 12 Wintersemester 2013/2014 14.01.2014

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Der Klausurtermin ist vorläufig auf den **12. Februar, 10-12 Uhr** festgesetzt.

Aufgabe 1 **3 Punkte**

(a) Für $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar gilt

$$\int_{B(0;\lambda)} u(x)\,dx \to \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda \downarrow 0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\,dx & \text{falls } \lambda \uparrow \infty. \end{cases}$$

(b) Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\partial B(0,\lambda)} u(\xi)\,dS(\xi) \to 0.$$

(c) Für $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und beliebigen Multiindex α sind die Produkte $vD^\alpha u$ und $uD^\alpha v$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^\alpha v(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} v(x) D^\alpha u(x)\,dx$$

Hinweis: Satz von Gauß auf $B(0;\lambda)$ mit $\lambda \uparrow \infty$.

Aufgabe 2 – Faltung von Schwartz Funktionen **2+1+2+2 Punkte**

Wir betrachten für $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Faltung

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y) v(y)\,dy \tag{1}$$

Beweisen Sie:

(a) Die Funktion $h(x,y) := u(x-y)v(y)$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^{2d}$ und es gilt die Faltungsabschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(u*v)(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|\,dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini, siehe Lösung zu Blatt 4.

(b) Es gilt $u * v = v * u$.

(c) $u * v$ ist beliebig of stetig differenzierbar und für jeden Multiindex α gilt

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$$

(d) $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Hinweis: Es gilt $(1+|x|^2) \le 2(1+|x-y|^2)(1+|y|^2)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 3 – Faltung integrierbarer Funktionen **2 Punkte**

Seien $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar und (u_n) und (v_n) Folgen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n(x) - u(x)|\, dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |v_n(x) - v(x)|\, dx = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |(u_n * v_n)(x) - g(x)|\, dx = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $g_n := u_n * v_n$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und benutzen Sie, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein vollständiger normierter Raum ist.

(b) Seien $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und integrierbar. Dann existiert eine (Borel-messbare) integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)\, dy \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|\, dx.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jede integrierbare Funktion durch eine Folge von Schwartz Funktionen bzgl. der L^1-Norm approximiert werden kann.

Bemerkung: Für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert man die Faltung $u * v$ als Grenzwert von $u_n * v_n$, wobei u_n, v_n beliebige Folgen stetiger, integrierbarer Funktionen bezeichnen, welche u, v in $L^1(\mathbb{R}^d)$ approximieren. Der Grenzwert ist als Element in $L^1(\mathbb{R}^d)$ unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge.

Aufgabe 4 **2+2 Punkte**

Sei $d \ge 1$ und $\mu > 0$. Es bezeichne $G(t,x)$ den Wärmeleitungskern

$$G(t,x) := \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d,\ t \le 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) Durch

$$G_\mu(x) := \int_0^\infty \exp(-\mu t) G(t,x)\, dt$$

wird eine nicht-negative, integrierbare Funktion $G_\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_\mu(x)\, dx = \frac{1}{\mu}.$$

(b) Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Es existiert $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\mu u - \triangle u = f \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Sie dürfen verwenden, dass G_μ eine Fundamentallösung von $(\mu - \triangle)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ist, was wir in der Vorlesung beweisen werden.
Hinweis: Beweisen Sie die Aussage für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und benutzen Sie, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$ dicht.