Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 13 | Wintersemester 2013/2014 | 21.01.2014

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Die Klausur findet statt am **12. Februar, 10-12 Uhr**.

Aufgabe 1 — **3 Punkte**

Sei $d = 1, 2, 3, \dots$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C = C(k, d) > 0$, so dass für alle $g \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\hat{g}(\xi)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha g(x)| \, dx \right) (1 + |\xi|^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

Aufgabe 2 — **4 Punkte**

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ mit $(1 + |x|^2)^{\frac{M}{2}}(|f(x)| + |\partial_k f(x)|)$ integrierbar für ein $M \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $T_f, T_{\partial_k f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und

$$\partial_k T_f = T_{\partial_k f} \qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $T_f, T_{\mathcal{F}f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}.$$

Aufgabe 3 — **3 Punkte**

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \exp(-|x|)$$

und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4 — **4 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ elliptisch, d.h.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d : \qquad \xi \cdot A\xi = \sum_{i,j=1}^d \xi_i \xi_j A_{ij} \geq 0.$$

Beweisen Sie: Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ existiert ein eindeutiges $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$u - \operatorname{div}(A \nabla u) = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^d.$$