Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 14 Wintersemester 2013/2014 28.01.2014

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Die Klausur findet statt am **12. Februar, 10-12 Uhr**. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage.

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Finden Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation (partiell bezüglich x) ein $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ mit

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u + 2\partial_x u + 3u \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

und Anfangsbedingung

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $A : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig differenzierbar. Für $u \in C^2(\Omega)$ sind äquivalent:

(a) $$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega,$$

(b) $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ : \ \int_\Omega \nabla\varphi(x) \cdot A(x)\nabla u(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $d \geq 2$ und $\Omega = B(0;1) \subset \mathbb{R}^d$. Betrachten Sie für $\beta > 0$ die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} |x|^{-\beta} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Bestimmen Sie alle $\beta > 0$ mit $u \in L^p(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie: u ist fast überall differenzierbar; und bestimmen Sie alle $\beta > 0$ mit $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$.

(c) Sei $\beta > 0$ so gewählt, dass $u, |\nabla u| \in L^p(\Omega)$. Beweisen Sie, dass die Ableitung von u in $D'(\Omega)$ durch die punktweise Ableitung von u gegeben ist, d.h. es gilt $T_{\partial_i u} = \partial_i(T_u)$ in $D'(\Omega)$.

(d) Bestimmen Sie alle $\beta > 0$, so dass

$$u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L^2(\Omega)$ und $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$ sei symmetrisch, d.h. $A(x) = A^t(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Betrachten Sie das Funktional

$$J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u(x) \cdot A(x)\nabla u(x)\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für $u, v \in H^1(\Omega)$ und $s \in [0,1]$

(a)
$$J(u+v) = J(u) + J(v) + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot A(x)\nabla v(x)\,dx,$$

(b)
$$\begin{aligned} J(su + (1-s)v) = {} & sJ(u) + (1-s)J(v) \\ & - \frac{1}{2}s(1-s)\int_\Omega (\nabla u(x) - \nabla v(x)) \cdot A(x)(\nabla u(x) - \nabla v(x))\,dx. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für $u, v \in H^1(\Omega)$ den Grenzwert

(c)
$$\lim_{s\to 0} \frac{J(u+sv) - J(u)}{s}.$$