Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 2 Wintersemester 2013/2014 22.10.2013

Aufgabe 1 **2 Punkte**

Die Wellengleichung in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$(\partial^2_{x_1 x_1} - \partial^2_{x_2 x_2}) u(x_1, x_2) = 0.$$

Finden Sie alle Lösungen der Form $u(x_1, x_2) = f(x_1) g(x_2)$, wobei $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet (d.h. Ω ist offen und beschränkt) für welches der Satz von Gauß gültig ist, d.h.

$$\forall F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d) \ : \qquad \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS.$$

Hierbei bezeichnet ν die äußere Normale und S das Oberflächenelement auf $\partial\Omega$.
Beweisen Sie die erste und zweite *Greensche Formel*: Für $\varphi, \psi \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega \left(\psi \Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\right)\, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \nabla\varphi \cdot \nu \, dS$$

und

$$\int_\Omega \left(\, \psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi\right)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\psi \nabla\varphi \cdot \nu - \varphi \nabla\psi \cdot \nu\right)\, dS.$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Gegeben sei $u : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $d > 2$ radialsymmetrisch, d.h. es gibt eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt $u(x) = f(|x|)$.

(a) Finden Sie eine Gleichung welche f erfüllt, damit u harmonisch auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist.

(b) Berechnen Sie Lösungen dieser Gleichung mit dem Ansatz $f(r) = r^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 **3 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ harmonisch und

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\, dx < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $u \equiv 0$.