Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 3 Wintersemester 2013/2014 29.10.2013

Aufgabe 1 **1+2 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ konvex und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch in Ω. Zeigen Sie: Die Funktion $x \mapsto \phi(u(x))$ ist subharmonisch in Ω.

(b) Sei $u \in C^3(\Omega)$ harmonisch in Ω. Betrachte $v(x) := |\nabla u(x)|^2$. Zeigen Sie:

$$v(x) \leq \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} v(y)\, dy \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } r < \operatorname{dist}(x;\partial\Omega).$$

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, und es gelte $u(x) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy$ für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B(x;r)} \subset \Omega$. Zeigen Sie: u ist harmonisch in Ω.

Aufgabe 3 *(Diskretes Maximumsprinzip)* **3 Punkte**

Sei $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Abbildung mit $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |u(x)|^p < \infty$ für ein $1 \leq p < \infty$ und

$$-\triangle u(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}^d,$$

wobei

$$\triangle u(x) := \sum_{i=1}^d \left(u(x+e_i) + u(x-e_i) - 2u(x)\right),$$

den diskreten Laplace-Operator bezeichnet. Beweisen Sie

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} u(x) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} u(x) \geq 0$. *Zeigen Sie nun, dass im Falle* $\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} u(x) > 0$ *das Maximum von* u *in einem Punkt* $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ *angenommen wird und betrachten Sie* $\triangle u(x_0)$.

Aufgabe 4 - *(Stetige Abhängigkeit von den Daten)* **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \qquad \text{in } \Omega,\\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $c > 0$, die nur von Ω abhängig ist, so dass

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \leq c \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \max_{x\in\partial\Omega} |g(x)| \right).$$

Abgabe bis Dienstag 5.11.2013, 9.15 Uhr (Briefkasten)
`http://www.wias-berlin.de/people/neukamm/PDE/`