Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 4 Wintersemester 2013/2014 7.11.2013

Dieses Aufgabenblatt enthält Zusatzaufgaben, welche Integrationstheorie voraussetzen. Durch das Lösen dieser Aufgaben können zusätzliche Punkte erzielt werden. Auch Zusatzaufgaben sind prüfungsrelevant.

Aufgabe 1 (Vertauschen von Differentiation und Integration) 2 Punkte

Sei $u : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, $\partial_1 u : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ existiere und sei stetig. Dann ist

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_c^d u(x, y)\, dy$$

stetig differenzierbar, und es gilt $\varphi'(x) = \int_c^d \partial_1 u(x, y)\, dy$.

Zusatzaufgabe 1 **1 Zusatzpunkt**

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Funktion $g : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle folgenden Eigenschaften:

(i) $g(x, z)$ ist integrierbar in z über Ω für alle $x \in U$

(ii) $g(x, z)$ ist stetig differenzierbar in x für μ-fast alle $z \in \Omega$

(iii) $\sup_{x \in U} |\nabla_x g(x, z)|$ ist integrierbar in z über Ω

Dann ist

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \int_\Omega g(x, z)\, d\mu(z)$$

ist wohldefiniert, stetig differenzierbar in x und es gilt

$$\partial_i f(x) = \int_\Omega \partial_{x_i} g(x, z)\, d\mu(z).$$

Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 2 *(Äquivalenz der Mittelwerteigenschaften)* 2 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C(\Omega)$. Zeigen Sie: Die sphärische Mittelwerteigenschaft

$$\forall x \in \Omega,\ 0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) : \qquad u(x) = \frac{1}{|\partial B(x; r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi),$$

und die Kugelmittelwerteigenschaft

$$\forall x \in \Omega,\ 0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) : \qquad u(x) = \frac{1}{|B(x; r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy.$$

sind äquivalent. Sie dürfen folgende Identitäten benutzen: Sei $f \in C(B(x_0; R))$, dann gilt für alle $0 < r < R$

$$\int_{B(x_0;r)} f\, dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0;\rho)} f\, dS \right) d\rho, \tag{1}$$

sowie

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0;r)} f\,dr\right) = \int_{\partial B(x_0;r)} f\,dS. \qquad (2)$$

Zusatzaufgabe 2 **1 Zusatzpunkt**

Jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f : B(x_0; R) \to [-\infty, \infty]$ erfüllt (1) und (2), wobei (2) nur für fast alle $r \in (0, R)$ erfüllt ist. Beweisen Sie diese Aussage für Dimension $d = 2$. Folgern Sie weiter, dass für $u : \Omega \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, die Kugelmittelwerteigenschaft äquivalent ist zur fast sicheren sphärische Mittelwerteigenschaft: Für alle $x \in \Omega$ existiert eine (Lebesgue)-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$, so dass

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|}\int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,dS(\xi) \qquad \text{für alle } r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)) \setminus N.$$

Aufgabe 3 **0 Punkte**

Diese Aufgabe entfällt!

Aufgabe 4 **4 Punkte**

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine rotationssymmetrische, nicht-negative Funktion $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(\eta) = \overline{B(0;1)}$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \eta\,dx = 1$.

(b) Sei η wie in (a). Für $\varepsilon > 0$ setzte $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Zeigen Sie

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad \operatorname{supp}(\eta_\varepsilon(x-\cdot)) = \overline{B(x;\varepsilon)} \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon\,dx = 1.$$

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(\Omega)$ integrierbar. Für $\varepsilon > 0$ betrachte $f_\varepsilon(x) := \int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy$. Sei U eine offene Menge die kompakt in Ω enthalten ist. Zeigen Sie:

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(U)$ und $D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_\Omega f(y) D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\,dy$ für jeden Multiindex α.

(ii) Für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt $f_\varepsilon \to f$ gleichmäßig auf U.

Hinweis: Verwenden Sie Zusatzaufgabe 1.