Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 6 Wintersemester 2013/2014 19.11.2013

Aufgabe 1 - (Diskrete Faltung) **5 Punkte**

Vorbemerkung: In dieser und einer Reihe nachfolgender Aufgaben führen wir einen Differenzen-Kalkül für Funktionen auf $\mathbb{Z}^d$ ein. Man kann auf dieses Setting viele Überlegungen und Ideen übertragen, die wir für Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ entwickeln werden. Oftmals ist es einfacher Konzepte und Methoden in diesem diskreten Setting zu verstehen. Hierbei bedeuted "einfacher", dass insbesondere keine Maßtheorie erforderlich ist.

Für $1 \le p \le \infty$ und $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ definiere

$$\|u\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} := \begin{cases} \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty, \\ \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} |u(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \ell^p(\mathbb{Z}^d) &:= \{\, u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \,:\, \|u\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty \,\} \\ \ell_0(\mathbb{Z}^d) &:= \{\, u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \,:\, u(x) \neq 0 \text{ für endliche viele } x \in \mathbb{Z}^d \,\} \end{aligned}$$

Wir definieren für $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, \dots, d\}$:

- die diskreten Ableitungen

$$\tilde{\nabla}_i u(x) := u(x + e_i) - u(x), \qquad \tilde{\nabla}_i^* u(x) := u(x - e_i) - u(x).$$

- den diskreten Gradienten

$$\tilde{\nabla} u(x) := (\tilde{\nabla}_1 u(x), \cdots, \tilde{\nabla}_d u(x))$$

- die diskrete (negative) Divergenz

$$\tilde{\nabla}^* F(x) := \sum_{i=1}^{d} \tilde{\nabla}_i^* F_i(x).$$

Da $\tilde{\nabla} u$ ein Vektorfeld ist, ist $\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} u$ wohl-definiert.

(a) Zeigen Sie: Für $1 \le p < \infty$ ist $\ell_0(\mathbb{Z}^d)$ in $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dicht enthalten, d.h. für alle $u \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ und $\varepsilon > 0$ existiert $u_\varepsilon \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ mit $\|u - u_\varepsilon\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \varepsilon$. Beweisen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage nicht für $p = \infty$ gilt.
(*Bemerkung: Die analoge Aussage im Kontinuumsfall ist: Stetige Funktionen mit kompaktem Träger liegen dicht in* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *falls* $1 \le p < 0$.)

(b) Sei $\rho : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion mit $\|\rho\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)} = 1$. Beweisen Sie für $1 \le p < \infty$ die Jensensche Ungleichung

$$\forall u \in \ell^p(\mathbb{Z}^d) \; : \qquad \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \rho(x) u(x) \right|^p \le \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \rho(x) |u(x)|^p.$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $\rho \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$. Beachten Sie außerdem, dass $t \mapsto |t|^p$ eine konvexe Funktion ist.

(c) Zeigen Sie: Für $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ und $v \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \le p \le \infty$ ist die diskrete Faltung

$$(u * v)(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} u(y) v(x - y)$$

wohl-definiert (d.h. die Reihe auf der rechten Seite ist absolut konvergent) und es gilt die *Faltungsabschätzung*

$$\|u * v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \le \|u\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)} \|v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)},$$

sowie die Identität

$$u * v = v * u \qquad \text{in } \mathbb{Z}^d.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussagen zunächst für $u, v \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ und benutzen Sie dann Teil (a).

(d) Zeigen Sie: Für $u \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ und $F \in [\ell^q(\mathbb{Z}^d)]^d$ (d.h. $F : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^d$ und $F_i \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$) mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} u(x) \nabla^* F(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \nabla u(x) \cdot F(x).$$

(e) Beweisen Sie: Für $u \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ und $v \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ mit $1 \le p < \infty$ gilt

$$\nabla^* \nabla (u * v) = ((\nabla^* \nabla u) * v) = (u * (\nabla^* \nabla v))$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Wir sagen: Eine stetige Funktion $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ habe *sublineares Wachstum*, falls

$$\lim_{R \uparrow \infty} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |x| \le R}} \frac{|u(x)|}{R} = 0.$$

(a) Zeigen Sie: Jede harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^d$ mit sublinearem Wachstum ist konstant.

(b) Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$-\triangle u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^d$$

besitzt genau eine sublinear wachsende Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ mit $u(0) = 0$.

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass

$$\Psi(x) = -\frac{1}{8\pi} |x|^2 \log |x|, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

die Fundamentallösung des Bilaplace in $\mathbb{R}^2$ ist, d.h. für $f \in C_0^4(\mathbb{R}^2)$ und $u := \Psi * f$ gilt

$$\Delta \Delta u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Abgabe bis Dienstag 26.11.2013, 9.15 Uhr (Briefkasten)