Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 8 Wintersemester 2013/2014 3.12.2013

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Aufgabe 1 und Aufgabe 2 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Die Aufgaben werden wie folgt bewertet:

$$\max\{0,\ \textit{Anzahl richtige Antorten} - \textit{Anzahl falsche Antorten}\}.$$

Aufgabe 1 - Mittelwerteigenschaft **7 Punkte**

Es sei $d \geq 2$. Wir benutzen die Schreibweise $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

		richtig	falsch
(1)	Es existiert $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $-\triangle u = 0$ in $B(0;1)$, $u(x) = x_1^2$ für $x \in \partial B(0;1)$ und $u(0) = 2$.	☐	☐
(2)	Es existiert $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $-\triangle u = 0$ in $B(0;1)$, $u(x) = x_1^2$ für $x \in \partial B(0;1)$ und $u(0) = 1$.	☐	☐
(3)	Betrachte $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $-\triangle u(0) = 0$ und $\frac{1}{\lvert\partial B(0;1)\rvert}\int_{\partial B(0;1)} u\, dS = 1$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz $u(0) = 1$.	☐	☐
(4)	Es existiert eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $-\triangle u < 0$ in $B(0;1/2)$, $\frac{1}{\lvert\partial B(0;1)\rvert}\int_{\partial B(0;1)} u\, dS = 0$ und $u(0) = 1$.	☐	☐
(5)	Für jede stetige, nicht-negative, schwach subharmonische Funktion $u : B(0;10) \to \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^d$ mit $\lvert z\rvert = 1$ gilt $u(0) \leq \frac{2^d}{\lvert B(z;2)\rvert}\int_{B(z;2)} u\, dx$.	☐	☐
(6)	Es existiert eine harmonische Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\delta > 0$ mit $\sqrt{\lvert x\rvert} \leq u(x) \leq x^2$ für alle x mit $\lvert x\rvert < \delta$.	☐	☐
(7)	Jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ mit $-\triangle u < 0$ in $\mathbb{R}^d$ erfüllt $\frac{1}{\lvert\partial B(0;r)\rvert}\int_{\partial B(0;r)} u\, dS < \frac{1}{\lvert\partial B(0;R)\rvert}\int_{\partial B(0;R)} u\, dS$ für alle $0 < r < R$.	☐	☐

Aufgabe 2 - Maximumsprinzip **6 Punkte**

Betrachte den Annulus $\Omega := B(0;1) \setminus \overline{B(0;\frac{1}{2})} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial B(0;1), \\ u = 1 & \text{auf } \partial B(0;\frac{1}{2}). \end{cases}$$

Bemerkung: Die Existenz von u folgt mittels der Perronschen-Methode. Man kann u auch mit Hilfe der Fundamentallösung konstruieren.

		richtig	falsch
(1)	u ist eindeutig.	☐	☐
(2)	Es gilt $\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\int_\Omega \lvert u\rvert\,dx = 1$.	☐	☐
(3)	Es gibt eine harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, welche auf Ω mit u übereinstimmt.	☐	☐
(4)	Es existiert eine harmonische Funktion $v : \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0;\frac{1}{4})} \to \mathbb{R}$, welche auf Ω mit u übereinstimmt.	☐	☐
(5)	Es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\rho : (\frac{1}{2}, 1) \to \mathbb{R}$, so dass $u(x) = \rho(\lvert x\rvert)$ in Ω.	☐	☐
(6)	Es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\rho : (\frac{1}{2}, 1) \to \mathbb{R}$, so dass $u(x) = \rho(\lvert x\rvert)$ in Ω und $\rho'(t) = 0$ für ein $t \in (\frac{1}{2}, 1)$.	☐	☐

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Es seien offene Kugeln $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, mit $B_1 \neq B_2$ und $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ gegeben. Auf

$$S := \{\, u \in C(\mathbb{R}^d) \;:\; u \text{ ist schwach subharmonisch.} \,\}$$

definieren wir für $i = 1, 2$ die Operatoren $P_i : S \to C(\mathbb{R}^d)$ durch $P_i u := v$, wobei $v \in C(\mathbb{R}^d)$ die harmonische Fortsetzung von u in B_i bezeichnet, d.h. $v = u$ in $\mathbb{R}^d \setminus B_i$ und $-\triangle v = 0$ in B_i.

(a) Zeigen Sie: Für $i = 1, 2$ und $u \in S$ gilt $P_i u \in S$, $P_i u \geq u$ und $P_i P_i u = P_i u$.

(b) Sei $u_0 \in S$. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ definiere

$$u_k := \begin{cases} P_1 u_{k-1} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ P_2 u_{k-1} & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Folge u_k konvergiert gegen eine Funktion $u_\infty : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $u_\infty = u_0$ in $\mathbb{R}^d \setminus (B_1 \cup B_2)$ und $-\triangle u_\infty = 0$ in $B_1 \cup B_2$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge monoton ist und verwenden Sie den Konvergenzsatz von Harnack.

(c*) (Zusatzaufgabe - 1 Extrapunkt). Seien u_0 und u_∞ wie in Aufgabenteil (b). Sei $\xi_0 \in \partial B_1 \setminus \overline{B}_2$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B_1 \cup B_2}} u_\infty(x_\ell) = u_\infty(\xi_0) = u_0(\xi_0).$$

Sie dürfen oBdA annehmen, dass $B_1 = B(0;1)$.
Hinweis: Stellen Sie P_1 mit Hilfe des Poissonkerns dar und modifizieren Sie den Beweis von Aufgabe 3 (iii) auf Blatt 7.

Abgabe bis Dienstag 10.12.2013, 9.15 Uhr (Briefkasten)
`http://www.wias-berlin.de/people/neukamm/PDE/`