Dr. Stefan Neukamm, Florian Nolte, M.Sc.
Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabenblatt 9 Wintersemester 2013/2014 10.12.2013

Bei Fragen zum Übungsblatt wenden Sie sich bitte an Herrn Nolte (INF 294, Zimmer 226).

Der Klausurtermin ist vorläufig auf den **12. Februar, 10-12 Uhr** festgesetzt. Bitte melden Sie sich per Email schnellst möglich, jedoch bis spätestens Freitag, den 13. Dezember, falls Sie diesen Termin nicht wahrnehmen können.

Aufgabe 1

2 Punkte

Es bezeichne η den Friedrichschen Glättungskern. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Folge $\varphi_n(x) := \frac{1}{n^d}\eta(\frac{x}{n})$ konvergiert in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ für $n \to \infty$.

(b) Die Folge $\varphi_n(x) := \frac{1}{n}\eta(x)\sin(nx)$ konvergiert in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2

1+2+2 Punkte

Es bezeichne η den Friedrichschen Glättungskern und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Betrachten Sie

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\eta(x - z_k), \qquad \varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\eta(x - z_k)$$

Zeigen Sie:

(a) $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ für alle n.

(b) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und für jeden Multiindex α gilt $\lim_{n\to\infty} |D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi|_\infty = 0$.
Hinweis: $(C_b(\mathbb{R}^d), |\cdot|_\infty)$ ist ein vollständiger normierter Raum. Hier bezeichnet $C_b(\mathbb{R}^d)$ den Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ und $|\cdot|_\infty$ die Supremumsnorm. Hinweis: Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^\infty f(k)$ kann als Integral $\int_\mathbb{N} f(k)\,\mu(dk)$ geschrieben werden, wobei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichnet. Auch in dieser Situation gilt Zusatzaufgabe 1 auf Blatt 4.

(c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **3+2 Punkte**

Es bezeichne $B := B(0;1) \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, und $\mathring{B} := B \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie: Es existiert keine Funktion $u \in C^2(\mathring{B}) \cap C(\overline{B})$ mit

$$\begin{aligned} -\triangle u &= 0 \quad \text{in } \mathring{B}, \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial B \text{ und } u(0) = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung auf der gelochten Kreisscheibe nicht für beliebige stetige Randdaten im klassischen Sinne lösbar ist.

(b) Zeigen Sie: Sei $v \in C(\overline{B})$ harmonisch in der gelochten Kreisscheibe $\mathring{B}$, dann ist v schon in der ganzen Kreisscheibe B harmonisch.

Hinweis: Betrachten Sie $u = v - w$, wobei w die Lösung des Dirichlet-Problems der Laplace-Gleichung auf B mit Randdaten v bezeichnet. Sie dürfen Aufgabenteil (a) verwenden.

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass u stetig auf $\bar{B}$ ist, ist notwendig: Die Fundamentallösung ist harmonisch in $\mathring{B}$, aber nicht in B!