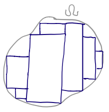
Kap. 9 Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Bereichsintegrale in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$



Grundmenge Ω in m Rechtecke R_k

→ Zerlegung Z

- Untersumme:

$$\underline{S}(f,Z) = \sum_{k=1}^{m} \inf_{(x,y)\in R_k} f(x,y) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

- Obersumme:

$$\overline{S}(f,Z) = \sum_{k=1}^{m} \sup_{(x,y)\in R_k} f(x,y) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

→ durch Verfeinerung: Unterintegral + Oberintegral

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über $\Omega \subset D$, falls:

$$\iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega := \underline{\iint_\Omega} f(\underline{x})\,d\Omega + \overline{\iint_\Omega} f(\underline{x})\,d\Omega$$

▷ Jordan-Maß von Ω:

$$\iint_\Omega 1\,d\Omega := \mu(\Omega)$$ Flächen-/Volumenmaße

ist $\mu(\Omega) = 0$ für M, so heißt μ eine Nullmenge

▷ Normalbereich: falls es Konstanten a, b und Funktionen $e_1, e_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \,;\, e_1(x) \le y \le e_2(x)\}$$

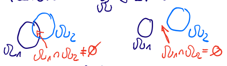
Alternativ: $a \le y \le b \,;\, e_1(y) \le x \le e_2(y)$

⇒ ist Ω ein Normalbereich und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig, so existiert das Riemann-Integral und es gilt

1.) Linearität $\iint_\Omega (\alpha \cdot f(\underline{x}) + g(\underline{x}))\,d\Omega = \alpha \cdot \iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega + \iint_\Omega g(\underline{x})\,d\Omega$

2.) Monotonie für $f \le g \Rightarrow \iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega \le \iint_\Omega g(\underline{x})\,d\Omega$

3.) Zerlegbarkeit des Gebietes



$$\iint_{\Omega_1} f(\underline{x})\,d\Omega_1 + \iint_{\Omega_2} f(\underline{x})\,d\Omega_2 = \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(\underline{x})\,d(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \iint_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(\underline{x})\,d(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

4.) Nullmengen Ω … Nullmenge: $\iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega = 0$

5.) Mittelwertsatz Ist f stetig auf Ω, so existiert ein $\underline{x}^* \in \Omega$:

$$\iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega = f(\underline{x}^*) \cdot \mu(\Omega)$$

▷ iteriertes Integral:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \,;\, e_1(x) \le y \le e_2(x)\}$$

$$\Rightarrow \iint_B f(\underline{x})\,dB = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=e_1(x)}^{e_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

▷ Koordinatentransformationen

z.B. Polarkoordinaten ($x = r \cdot \cos\varphi \,;\, y = r \cdot \sin\varphi$)

$$\iint_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega = \iint_D f(\underline{T}(\underline{u})) \cdot |\det J_{\underline{T}}(\underline{u})| \cdot dD$$

, wobei $\underline{T}(\underline{u})$ die Transformation beschr.

formal: $d\Omega = |\det J_{\underline{T}}(\underline{u})| \cdot dD$

- Funktionaldeterminanten
  - Polarkoordinaten: $\det J_{\underline{T}}(\underline{u}) = r$
  - elliptische Polarkoordinaten: $\underline{T}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos(\varphi) \\ b \cdot r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ … $\det J_{\underline{T}}(\underline{u}) = a \cdot b \cdot r$
  - Kugelkoordinaten: $\underline{T}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$ $\det J_{\underline{T}}(\underline{u}) = r^2 \cdot \cos(\theta)$

    $r \in [0;R] \,;\, \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \,;\, \varphi \in [0; 2\pi]$
  - Zylinderkoordinaten: $\det J_{\underline{T}}(\underline{u}) = r$

▷ Anwendungen der mehrdimensionalen Integralrechnung

- Masse M mit d. Dichte ϱ: $M = \iint_\Omega \varrho(\underline{x})\,d\Omega$
- Schwerpunkt eines Körpers (Dichte ϱ):

$$\underline{S} := \frac{1}{M} \cdot \iint_\Omega \underline{x} \cdot \varrho(\underline{x})\,d\Omega \Rightarrow \begin{cases} S_x = \frac{1}{M} \cdot \iint_\Omega x \cdot \varrho(\underline{x})\,d\Omega \\ S_y = \frac{1}{M} \cdot \iint_\Omega y \cdot \varrho(\underline{x})\,d\Omega \\ S_z = \frac{1}{M} \cdot \iint_\Omega z \cdot \varrho(\underline{x})\,d\Omega \end{cases}$$

Vektoranalysis mit grad, div und rot

▷ Der Nabla-Operator: $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

▷ Gradient:

$$\operatorname{grad} f := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{pmatrix}$$

… Gradientenfeld, zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f

$(SF) \xrightarrow{\operatorname{grad}} (VF)$

▷ Divergenz: $\operatorname{div} \underline{F} := \langle \nabla ; \underline{F} \rangle = \frac{\partial}{\partial x_1} F + \frac{\partial}{\partial x_2} F + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} F$

Misst die Stärke der lokalen Quellen und Senken

$(VF) \xrightarrow{\operatorname{div}} (SF)$

▷ Laplace-Operator: $\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \circ \nabla f$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f$$

$(SF) \xrightarrow{\Delta} (SF)$

(nur f. $n=3$:)

▷ Rotation:

$$\operatorname{rot} \underline{F} := \nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} F_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} F_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Misst die Stärke der lokalen Wirbeldichte / Drehungen von $\underline{F}$.

$(VF) \xrightarrow{\operatorname{rot}} (VF)$

! Immer Null !:

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(x,y,z) = \underline{0}$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F}(x,y,z) = \underline{0}$

Kurvenintegrale, Wegintegrale, Linienintegrale

Skalare Kurvenintegrale

Für eine stetige Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Parametrisierung $\underline{\gamma}: [\tau_0; \tau_1] \to D \subset \mathbb{R}^n$ von der Kurve γ ist das Kurvenintegral 1. Art:

$$\int_\gamma f \cdot ds := \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\underline{\gamma}(\tau)) \cdot \|\underline{\gamma}'(\tau)\|_2\,d\tau$$

- Bemerkung: Bogenlänge einer Fkt.

1.) Graph einer Fkt g; $\gamma = \{(x, g(x))\}$

$$l = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$$

2.) parametrisierte Kurve; $\gamma = \{(x(t) \,;\, y(t))\}$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt = \|\underline{\gamma}'(t)\|_2\,dt$$

$$l = \int_\gamma ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\underline{\gamma}'(t)\|_2\,dt$$

- Umparametrisierung: $\int_\gamma f\,ds$ ist unabhängig von der Wahl von $\underline{\gamma}$. Außerdem ist der Wert unabhängig von der Orientierung der Parametrisierung

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{-\gamma} f\,ds \quad (-\gamma \text{ f. umgekehrt durchl. Kurve})$$

Vektorielle Kurvenintegrale

Das Kurvenintegral 2. Art entlang einer mit $\underline{\gamma}(t)$ parametrisierten Kurve γ über einem Vektorfeld $\underline{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} := \int_a^b \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) ; \underline{\gamma}'(t) \rangle\,dt$$

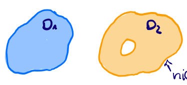
$$= \int_a^b (F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \ldots + F_n(\gamma(t)) \cdot \gamma_n'(t))\,dt$$

Das Kurvenintegral 2. Art ist von der Orientierung abhängig:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = -\int_{-\gamma} \underline{F} \cdot ds$$

, jedoch von der Parametrisierung unabhängig

▷ einfach zusammenhängend $\hat{=}$ wenn jede geschlossene Kurve in D zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne D zu verlassen.



○ ⇒ ○ ⇒ ∘ ⇒ •

nicht einfach zusammenhängend

▷ Ist $\underline{F}$ ein Gradientenfeld und D einfach zusammenhängend, so gilt für $\underline{F} = \operatorname{grad} \Phi$:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot ds = \int_\gamma \operatorname{grad} \Phi \cdot ds = \Phi(\underline{\gamma}(b)) - \Phi(\underline{\gamma}(a))$$

⇒ wegunabhängig

→ $\underline{F}$ ist genau dann ein Gradientenfeld (es ex. eine Potentialfunktion Φ), wenn die Integrabilitätsbedingungen gelten

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (\text{für } n=3: \operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0})$$

▷ Bestimmung der Potentialfunktion ϕ:

$\underline{F} = \operatorname{grad} \phi \longrightarrow F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \Rightarrow \phi(\underline{x}) = \int F_1(\underline{x})\,dx_1$

$F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \ldots + \frac{\partial}{\partial x_2} C_1(x_2, x_3)$

→ $C_1(x_2, x_3) = \int \frac{\partial}{\partial x_2} C_1(x_2, x_3)\,dx_2$

$F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \ldots + C_2'(x_3)$

→ $C_2(x_3) = \int C_2'(x_3)\,dx_3$

⇒ $\phi(\underline{x}) = \ldots$

▷ Ringintegrale Integrale geschlossener Kurven über Gradientenfeldern $\underline{F}$ besitzen den Wert Null:

$$\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} := \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = 0$$

Oberflächenintegrale in $\mathbb{R}^3$

Oberflächenintegrale 1. Art

Es seien $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich und $S := \underline{\Gamma}(B) \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück mit der Parametrisierung $\underline{\Gamma}$. Für ein stetiges Skalarfeld $f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $S \subset D_f$ heißt

$$\iint_S f\,dA := \iint_B f(\underline{\Gamma}(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial u} \underline{\Gamma}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v} \underline{\Gamma}(u,v) \right\|_2 d(u,v)$$

Oberflächenintegral 1. Art von f über S

Oberflächenintegrale 2. Art ("Flüsse")

(…wie oben). Für ein stetiges Vektorfeld $\underline{F}: D_{\underline{F}} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $S \subset D_{\underline{F}}$ heißt

$$\iint_S \underline{F} \cdot d\underline{A} := \iint_B \left\langle \underline{F}(\underline{\Gamma}(u,v)) ; \left(\frac{\partial}{\partial u} \underline{\Gamma}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v} \underline{\Gamma}(u,v) \right) \right\rangle d(u,v)$$

$$= \iint_B \underbrace{\left[\underline{F}(\underline{\Gamma}(u,v)) ; \frac{\partial}{\partial u} \underline{\Gamma}(u,v) ; \frac{\partial}{\partial v} \underline{\Gamma}(u,v) \right]}_{\text{Spatprodukt}} d(u,v)$$

, falls das Kreuzprodukt wie die Normale $\underline{n}$ von $\underline{\Gamma}$ orientiert ist, Oberflächenintegral 2. Art bzw. Flussintegral

→ sollten $\underline{n}$ und das Kreuzprodukt antiparallel sein, so wird die rechte Seite mit (-1) multipliziert

Integralsätze

Satz von Gauß

Seien $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Volumen als Normalbereich beschrieben, mit Oberfläche $\partial V = A_{Rand}$ und $\underline{v}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $V \subset D$ ein in V stetig differenzierbares Vektorfeld, dann gilt

$$\oiint_{A_{Rand}} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iiint_V \operatorname{div} \underline{v} \cdot dV$$

in $\mathbb{R}^2$ gilt analog:

$$\iint_A \operatorname{div} \underline{v} \cdot dA = \int_a^b \left\langle \underline{v}, \begin{pmatrix} \gamma_2'(\tau) \\ -\gamma_1'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle d\tau \quad , \text{da } \underline{n} := \begin{pmatrix} \gamma_2'(\tau) \\ -\gamma_1'(\tau) \end{pmatrix}$$

⇒ ist $\underline{v}$ divergenzfrei in V, so gilt: $\oiint_{A_{Rand}} \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0$

Satz von Stokes

Es seien A eine glatte Fläche mit einer Randkurve $\partial A = \gamma_{Rand}$ und $\underline{v}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A \subset D$ ein stetig diff.-bares Vektorfeld. So gilt:

$$\iint_A \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \oint_{\gamma_{Rand}} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

, wobei die Parametrisierungen von A und γ_{Rand} der Rechte-Hand-Regel genügen.

Anwendungen der Integralsätze

▷ Greensche Formel

$u, v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig diff.-bare Funktionen und $\underline{w} = v \cdot \operatorname{grad} u$

$$\iiint_V -\Delta u \cdot v\,dV = \iiint_V \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle\,dV - \oiint_{\partial V} (\operatorname{grad} u \cdot v) \cdot d\underline{A}$$

▷ Sektorformel (nach 2D-Gauß und $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)

$$\iint_A \underbrace{\operatorname{div} \underline{v}}_{=2} \cdot dA = \oint_{\partial A} \left(v_1 \cdot \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} - v_2 \cdot \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau$$

$$= \oint_{\partial A} (x \cdot y' - y \cdot x')\,d\tau \quad \| x = x(\tau) ; y = y(\tau)$$

$$\Rightarrow \iint_A \operatorname{div} \underline{v} \cdot dA = 2 \cdot \iint_A dA = 2\mu(A)$$

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial A} (x y' - y x')\,d\tau$$