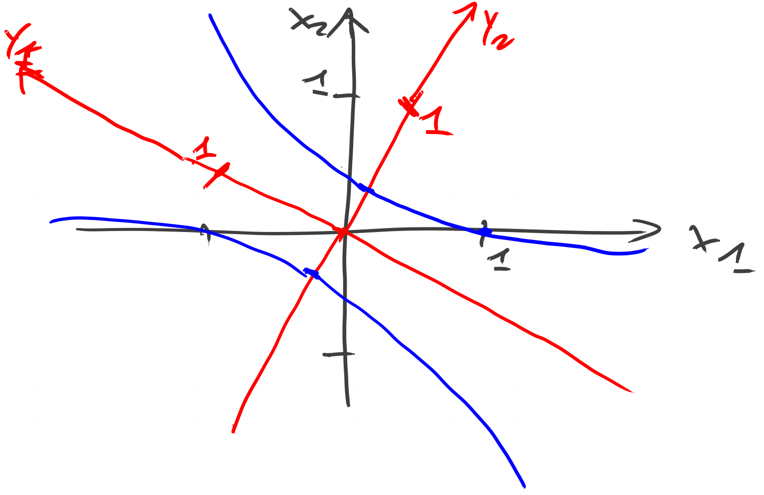
$\Rightarrow$ Hyperbel



Def 7.61

Eine Quadrik ist eine allgemeine Gleichung 2. Grades der Form

$$\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{m}^T\underline{x} + c = 0,$$

mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, die eine Kurve/Fläche/Hyperfläche beschreibt.

Die zu einer Quadrik gehörige Normalform erhalten wir in 2 Schritten

1) Verschiebung: Löse $A\underline{s} = -\underline{m}$ nach $\underline{s}$ und setze $\underset{\text{alt}}{\underline{x}} = \overset{\text{neu}}{\underline{r}} + \underset{\text{Verschiebung}}{\underline{s}}$

(Achtung: nicht immer lösbar)

$\Rightarrow$ lineare Terme weg

$$r^T A r + \underbrace{(c + \underline{m}^T\underline{s})}_{=: g \in \mathbb{R}} = 0$$

2) Hauptachsentransformation: $\Rightarrow$ gemischte Terme weg

$$\underline{y} = Q^T\underline{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{y}^T \Lambda \underline{y} + g = 0}$$

Bsp 7.62

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 - 4x_2 + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x}^T A\underline{x} + 2\underline{m}^T\underline{x} + c = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{m} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = 24$$

1) Verschiebung: $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{II+3I}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ 25 & 0 & 50 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) HAT: $\underline{r}^T A \underline{r} + g = 0 \quad , g = 24 + \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10 \quad \Rightarrow$ Ellipse

$$\lambda_1: \quad (A - 5E)\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \Leftrightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}^1 \perp \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\underline{r} = Q\,\underline{y}$ folgt

$$\tilde{g}(\underline{y}) = 5y_1^2 + 10y_2^2 = 10 \qquad |:10$$

$$\underline{y}^T \Lambda \underline{y}$$

$$\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y_2^2 = 1 \quad !$$

Ellipse mit $a = \sqrt{2}$, $b = 1$

Zeichnen:

1) Koordinatensystem (x_1, x_2)
2) verschobenes Koordinatensystem (r_1, r_2) mit $\underline{r} = \underline{x} - \underline{s}$
3) gedrehtes verschobenes Koordinatensystem (y_1, y_2) mit $\underline{y} = Q^T \underline{r}$
4) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ Ellipse in $\underline{y}$

7.6 Anwendungen in der Mechanik

↗ Kinematik, Basiswechsel (↗ Bem. 6.19)
Rotationen in $\mathbb{R}^3$

Angenommen wir haben 2 ONB in $\mathbb{R}^3$

$$B = (\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3), \quad \langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$C = (\underline{c}^1, \underline{c}^2, \underline{c}^3), \quad \langle \underline{c}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{ij}$$

und einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Darstellungen:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_C \iff \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \underline{b}^i = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot \underline{c}^j$$

Stellen wir Basisvektoren $\underline{c}^j$ bzgl. der Basis B dar

$$\underline{c}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}_B = a_{1j} \cdot \underline{b}^1 + a_{2j} \cdot \underline{b}^2 + a_{3j} \cdot \underline{b}^3$$

Die Koeffizienten erhalten wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle \underline{c}^j, \underline{b}^i \rangle = a_{1j} \langle \underline{b}^1, \underline{b}^i \rangle + a_{2j} \langle \underline{b}^2, \underline{b}^i \rangle + a_{3j} \langle \underline{b}^3, \underline{b}^i \rangle$$

$$= a_{ij}$$

Es folgt

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}_B + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}_B + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}_B = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_C = A \cdot \underline{x}_C$$

mit
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{b}^1, \underline{c}^1 \rangle & \langle \underline{b}^1, \underline{c}^2 \rangle & \langle \underline{b}^1, \underline{c}^3 \rangle \\ \langle \underline{b}^2, \underline{c}^1 \rangle & \langle \underline{b}^2, \underline{c}^2 \rangle & \langle \underline{b}^2, \underline{c}^3 \rangle \\ \langle \underline{b}^3, \underline{c}^1 \rangle & \langle \underline{b}^3, \underline{c}^2 \rangle & \langle \underline{b}^3, \underline{c}^3 \rangle \end{pmatrix} = \left(\underline{c}^1_B \; \underline{c}^2_B \; \underline{c}^3_B \right)$$

Kurz: $$\underline{x}_B = A\,\underline{x}_C$$

Ganz analog: $$\underline{x}_C = A^{-1}\underline{x}_B \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \underline{c}^1, \underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^1, \underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^1, \underline{b}^3\rangle \\ \langle \underline{c}^2, \underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^2, \underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^2, \underline{b}^3\rangle \\ \langle \underline{c}^3, \underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^3, \underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^3, \underline{b}^3\rangle \end{pmatrix} = A^T$$

<u>Satz 7.63</u>

Es seien B und C zwei ONB in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Matrix $A = (a_{ij}) = (\langle \underline{b}^i, \underline{c}^j\rangle)$ welche den Basiswechsel $\underline{x}_B = A\underline{x}_C$ für jeden Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt, orthogonal.

Wir können die Multiplikation $A\underline{x}$ auf 2 Arten interpretieren:

- Basiswechsel $\to$ Satz 7.63
- Abbildung eines Vektors $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ auf einen neuen Punkt $\underline{y} = A\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

<u>Bem 7.64</u>

Für zwei Vektoren $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, die eine Winkel α einschließen, und die mit einer orthogonalen Matrix A multiplizierten Vektoren $A\underline{x}, A\cdot\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

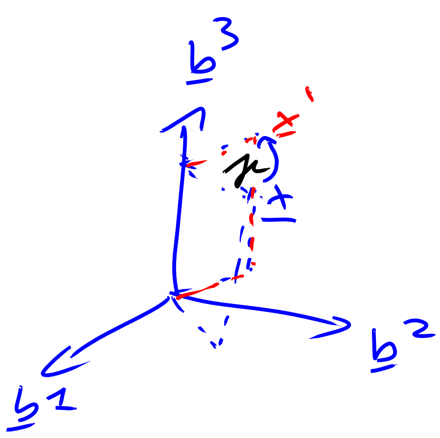
$$\langle A\underline{x}, A\underline{y}\rangle = (A\underline{x})^T(A\underline{y}) = \underline{x}^T A^T A \underline{y} = \underline{x}^T\underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|\cos(\alpha)$$

D.h. die Abbildung $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ erhält Winkel und Längen

$$\|A\underline{x}\|^2 = \langle A\underline{x}, A\underline{x}\rangle = \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle = \|\underline{x}\|^2.$$

<u>Bsp 7.65</u>

Gegeben ist eine ONB B und A beschreibe eine Drehung um einen Winkel φ mit der Drehachse $\underline{b}^3$. Wie lautet A?



Um die Matrix A zu beschreiben, müssen nur die Basisvektoren abgebildet werden

$$\underline{c}^1 = A\underline{b}^1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^2 = A\underline{b}^2 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^3 = A\underline{b}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{b}^3$$

$$\Rightarrow A = (\underline{c}^1\,\underline{c}^2\,\underline{c}^3) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

Analog für Winkel β und Achse $\underline{b}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

und für Winkel α und Achse $\underline{b}^1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

Letztlich ist mit diesen drei Elementardrehungen jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibbar.
($\nearrow$ Eulersche Drehwinkel)

Wie sieht die Drehmatrix D um eine beliebige Drehachse $\underline{d}$ (mit $\|\underline{d}\|=1$) mit einem Winkel φ aus?

Eine solche Matrix sollte die Drehachse unverändert lassen.

$$D\underline{d} = \underline{d}.$$

Betrachten wir einen Punkt $\underline{x}$ außerhalb der Drehachse, dann lässt die Drehung den Anteil von $\underline{x}$ unverändert, der parallel zu $\underline{d}$ ist und nur der zu $\underline{d}$ orthogonale Anteil wird gedreht.

$$\Rightarrow \qquad D\underline{x} = \underline{d}\,\underline{d}^T\underline{x} + \left(\cos(\varphi)\cdot(E-\underline{d}\,\underline{d}^T) + \sin(\varphi)\cdot S_{\underline{d}}\right)\underline{x}$$

wobei

$$S_{\underline{d}}\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{d}\times\underline{x}$$

$\nearrow$ Bem 7.13 (Matrixdarstellung Kreuzproduktes)

Für $S_{\underline{d}}$ gilt

$$S_{\underline{d}}^T = -S_{\underline{d}}.$$

Die Drehachse wird unverändert gelassen, denn

$$D\underline{d} = \underbrace{\underline{d}\,\underline{d}^T\underline{d}}_{=\|\underline{d}\|^2=1} + \cos(\varphi)\underbrace{(E-\underline{d}\,\underline{d}^T)\underline{d}}_{\underline{d}-\underline{d}\,\underline{d}^T\underline{d}} + \sin(\varphi)\,S_{\underline{d}}\cdot\underline{d}$$

$$= \underline{d} + \underline{0} + \sin(\varphi)\cdot\underline{d}\times\underline{d} = \underline{d} \qquad (\text{wegen } \|\underline{d}\|=1).$$

Die Drehung um $-\varphi$ ist

$$\underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(-\varphi)(E-\underline{d}\,\underline{d}^T) + \sin(-\varphi)\,S_{\underline{d}} = \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)(E-\underline{d}\,\underline{d}^T) + \sin(\varphi)\cdot\underbrace{(-S_{\underline{d}})}_{=S_{\underline{d}}^T}$$

$$= D^T$$

Es folgt (nachrechnen!)

$$DD^T = E$$

$\Rightarrow$ D ist orthogonal.

Satz 7.66

Jede orthogonale Matrix $Q\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(Q)=1$ ist eine Drehmatrix zu einer Drehachse $\underline{d}$ und einem Winkel φ.

Die Drehachse zu einer gegebenen orthogonalen Matrix Q lässt sich relativ leicht bestimmen, denn es gilt:

$$Q - E = Q - QQ^T = Q\,(E - Q^T) = Q(E - Q)^T$$

$$\Rightarrow \quad \det(Q-E) = \det(Q)\cdot\det(E-Q) = 1\cdot(-1)^3\,\det(Q-E) = -\det(Q-E)$$

$$\Rightarrow \quad \det(Q-E) = \det(Q - \lambda\cdot E) = 0 \quad \text{für } \lambda = 1.$$

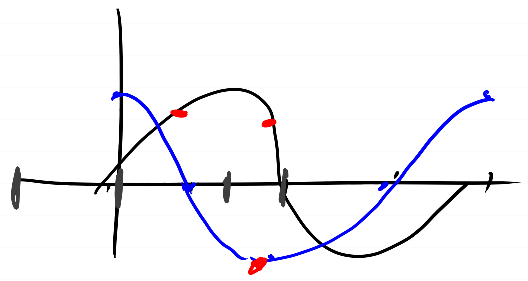
d.h. $\lambda = 1$ ist EW von Q. Ein zugehöriger normierter EV ist die Drehachse.

Der Nachweis, dass Q eine Drehmatrix ist lässt sich mit Koordinatentransformation nachweisen, wenn eine der neuen Koordinaten die Drehachse ist.

Für die Berechnung von φ schauen wir den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Anteil von Q an:

$$\frac{1}{2}(Q + Q^T) = \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)(E - \underline{d}\,\underline{d}^T)$$

$$\frac{1}{2}(Q - Q^T) = \sin(\varphi)\; S_{\underline{d}}$$



Bsp 7.67

Gegeben sei

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

orthogonale Matrix:

$$AA^T = \frac{1}{9}\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{matrix}\end{array}\right) = E, \quad \det(A) = \dots = 1$$

$\Rightarrow$ A ist Drehmatrix:

Drehachse: $(A - E)\underline{d} = \underline{0} \iff \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \iff \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$

$$\underline{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix} \overset{!}{=} \sin(\varphi)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)\left(E - \underline{d}\,\underline{d}^T\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(\varphi) & 1-\cos(\varphi) & 0 \\ 1-\cos(\varphi) & 1+\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 1.9106 \approx 109{,}5^\circ$$

ENDE