




Selbsteinschätzung Mathe I

Semesterwoche für Semesterwoche sollten Sie immer mehr Fragen beantworten können.

Die 3 Kreise    mit Ampelfarben dienen der Selbsteinschätzung. Kreuzen Sie an:

-  Ich kann die Frage vollständig beantworten und bin mir sicher, dass meine Antwort richtig ist.
-  Ich kann die Frage nur teilweise beantworten und bin mir nicht so sicher.
-  Ich kann die Frage nicht beantworten bzw. ich bin mir sehr unsicher, wie die richtige Antwort lautet.

1 Logik

1. Was ist ein logischer Ausdruck?



2. Können Sie wenigstens 3 logische Verknüpfungen nennen und deren Wahrheitstabelle angeben?



3. Wozu benutzt man den Allquantor \forall ?



4. Sind die beiden folgenden Aussagen gleich?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : p(x, y) \quad \text{und} \quad \exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x, y)$$

Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an!



2 Beweis Prinzipien

1. Gegeben Sie die Struktur eines Beweises durch vollständige Induktion (die Teilschritte) an.



2. Wählen Sie ein Beispiel für eine Summenformel einer endlichen Summe (z.B. Merziger 6.1).
Können Sie den Induktionsbeweis durchführen?



3 Komplexe Zahlen

1. Können Sie eine komplexe Zahl in kartesischer Form (z.B. $2+6i$) in exponentielle/Eulersche Form umwandeln? Können Sie eine komplexe Zahl in exponentieller Form (z.B. $2 * e^{i\frac{\pi}{4}}$) in kartesische Form umwandeln?



2. Können Sie komplexe Zahlen in kartesischer sowie exponentieller Form multiplizieren? z.B. $z = (-3 + 2i) * (-5 - i)$ oder $z = (-3 + 2i) * (2 * e^{i\frac{\pi}{4}})$



3. Können Sie alle Lösungen der folgenden komplexen Gleichung bestimmen?

$$z^6 = 1$$



4. Welche Menge der Punkte $z = x + iy$ wird beschrieben durch:

$$|z + 2i| \leq |z - 2i|$$

- Alle außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt (0,2)
- Die untere Halbebene mit X-Achse
- Die obere Halbebene ohne X-Achse
oder
- Alle außerhalb und auf dem Kreis mit Mittelpunkt (0,2)



4 Kurvendiskussion

1. Können Sie die Bilder von Funktionen $y = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^1$ skizzieren?
z.B.

$$y = f_1(x) = 2 \cdot \sin \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| \right)$$



2. Ist die Funktion $f_1(x)$ in \mathbb{R}

- gerade/ungerade?
- monoton wachsend/fallend?
- periodisch?

- beschränkt?



3. Wo liegen die Pol- und Nullstellen der Funktion $f_3(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x^2 - 3x - 10)(x + 1)}$



4. Geben Sie die Asymptote der Funktion $f_3(x)$ an!



5 Der Logarithmus - Ihr Freund

1. Können Sie aus dem Stegreif $\ln(1)$, $\ln(e^3)$, $\ln(\sqrt{e})$, $\ln\left(\frac{1}{e^5}\right)$ angeben?



2. Welche Zahl x löst $\log_a(x) + \log_a(2) = \log_a(8)$? ($a > 0, a \neq 1$)



3. Ist Ihnen klar, dass $2\ln(e^4) - e^{3\ln 2} = 0$ ist?



6 Konvergenz von Folgen und Reihen

1. Was bedeuten die Begriffe (Zahlen-)Folge, Grenzwert und Nullfolge?



2. Können Sie je ein Beispiel für eine konvergente, eine divergente und eine bestimmt divergente Folge angeben?



3. Kennen Sie den Grenzwert der Folge (x_n) mit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?



4. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergiert

- für jeden Exponenten $a > 1$ gegen eine Zahl
- für jeden Exponenten $a > 0$ gegen eine Zahl
- für jeden Exponenten $a \geq 1$ gegen eine Zahl
- für keinen Exponenten gegen eine Zahl



5. Sie können Wurzelkriterium, Quotientenkriterium sowie Leibniz-Kriterium anwenden und wissen auch wann welches einzusetzen ist?

Beispiel Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{3k+8}\right)^{2k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k * (3k+2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{3^n}$$



7 Grenzwerte

1. Können Sie den Grenzwert einer gebrochen rationalen Funktion bestimmen?
z.B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x^2}{3x+6x^2}$$



2. Verstehen Sie den Unterschied zwischen $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x}$ und $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x}$?



3. Wissen Sie, wie Sie bei Grenzwerten ' $\frac{0}{0}$ ' und ' $\frac{\infty}{\infty}$ ' vorgehen müssen?



4. Wissen Sie, wie Sie bei Grenzwerten ' $0 \cdot \infty$ ', ' 1^∞ ' und ' ∞^0 ' vorgehen müssen?



8 Taylor-Polynom

1. Können Sie eine Funktion f(x) mittels Taylor Polynom vom Grad n in der Entwicklungsstelle x_0 annähern?

z.B.

$$f(x) = \ln(3+x), n=3, x_0=0$$



2. Wissen Sie welche Werte das s in der Formel des Restgliedes $R(x) = f^{(n+1)}(s) * \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ abhängig von x annehmen kann?



3. Können Sie mit Hilfe des Restgliedes den Fehler einer mittels Taylor Polynom genäherten Funktion $f(x)$ bei einem gegebenen Intervall für x abschätzen?
z.B. für Beispiel aus 8.1 und $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$



9 Potenzreihen

1. Was ist eine Potenzreihe?



2. Was bedeuten die Begriffe **Entwicklungspunkt** und **Konvergenzintervall**?



3. Wie bestimmen Sie den **Konvergenzradius**? Können Sie eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho = 2$ angeben?



4. Was ist richtig?

- Entweder die Potenzreihe konvergiert auf den 'ganzen' Rand des Konvergenzintervalls oder sie divergiert auf dem ganzen Rand.
- Eine Potenzreihe kann in einem Teil des Randes des Konvergenzintervalls konvergieren und auf dem anderen Teil divergieren.



5. Kennen Sie die Potenzreihe der Exponentialfunktion und ihren Konvergenzradius?



10 Integration von Funktionen einer Veränderlichen

1. Sind Ihnen die Begriffe Zerlegung, Unter- und Obersumme sowie Riemann-integrierbar klar?



2. Können Sie den Ansatz zur Berechnung der Untersumme für die Fläche unter der Funktion $y = x^2$ zwischen $x = 3$ und $x = 4$ hinschreiben?



3. Können Sie problemlos zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen umformen
z.B. $x\sqrt[4]{x} = x^{\frac{5}{4}}$ oder $3^x = e^{\ln(3)x}$



4. Können Sie eine einfache Partialbruchzerlegung (PBZ) durchführen?



5. Wie gehen Sie mit einer doppelten Nullstelle bei der PBZ um?



6. Wie gehen Sie mit einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar bei der PBZ um?



7. Können Sie ein Integration mittels Substitution durchführen?



8. Können Sie eine partielle Integration durchführen?



9. Wissen Sie wann und wie sie die Generalsubstitution $t = \tan \frac{x}{2}$ anwenden können?



10. Wie entscheiden Sie, mit welcher Technik Sie eine Integration durchführen?



11. Wie gehen Sie mit einem Integral wie $\int_{-\infty}^3 f(x)dx$ um?



12. Wissen Sie, worauf Sie bei $\int_{-2}^3 x^{-2}dx$ achten müssen?



11 Vektorräume & analytische Geometrie

1. Was bedeuten die Begriffe Linearkombination, linear unabhängig, kollinear, komplanar, lineare Hülle, Dimension bzw. Basis eines Vektorraumes, Koordinaten eines Vektors bzgl. einer Basis und wie hängen diese Begriffe zusammen?



2. Wie entscheiden Sie, ob drei Vektoren linear unabhängig sind. z.B. für

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$



3. Was ist ein Einheitsvektor und was sind die kanonischen Einheitsvektoren des \mathbb{R}^3 ?



4. Können Sie den Betrag, das Skalarprodukt, das Kreuzprodukt und die das Spatprodukt von Vektoren bestimmen?



5. Wie berechnen Sie die Projektion eines Vektors auf einen anderen?



6. Woran erkennen Sie, ob zwei Vektoren zueinander orthogonal sind?



7. Was ist der Unterschied zwischen orthogonal und orthonormal?



8. Skizzieren Sie die Vorgehensweise bei der Gram-Schmidt Orthonormalisierung.



9. Können Sie zwischen Parameter- und parameterfreier Form (z.B. Hessescher Normalform) von Ebenen umrechnen?



10. Wissen Sie wie man zwischen Parameter- und parameterfreier Darstellung von Geraden im \mathbb{R}^2 umrechnet?



11. Wie bestimmen Sie die folgenden Abstände?

(a) Abstand eines Punktes P von der Ebene A, z.B.

$$P(4, -3, 1) \quad E : x - 8y + 32z + 6 = 0$$

(b) Abstand zweier Ebenen, z.B.

$$E_1 : 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \quad E_2 : -4x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 8$$

(c) Abstand windschiefer Geraden, z.B.

$$g_1 : \underline{x} = (1, 3, 1)^T + t \cdot (1, 2, -1)^T \quad g_2 : \underline{x} = (2, 0, 1)^T + s \cdot (-1, 1, 0)^T$$



12. Wie entscheiden Sie, ob zwei gegebene Geraden windschief oder parallel sind oder sich schneiden, z.B. für

$$g_1 : \underline{x} = (1, 2, -1)^T + t \cdot (1, 0, -3)^T \quad g_2 : \underline{x} = (2, -4, -1)^T + s \cdot (-2, 6, 3)^T ?$$

Können Sie den Winkel zwischen den beiden Geraden bestimmen?



13. Können Sie die Schnittgerade und den Winkel zwischen den zwei Ebenen bestimmen, z.B. für

$$E_1 : 4x + 11y - 9z = 6 \quad E_2 : x + 14y - 6z = 9 ?$$



14. Woran erkennen Sie, ob zwei Ebenen parallel sind?



12 Lineare Gleichungssysteme

1. Können Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die Lösung eines Gleichungssystems bestimmen?

z.B.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$



2. Was wissen Sie über die Lösung eines Gleichungssystems, wenn bei der Anwendung des Gaußschen Algorithmus in einer Zeile '0=0' entsteht?



3. Können Sie die Lösbarkeit von parameterabhängigen Gleichungssystemen bestimmen?
Beispiel: Für welche Werte a und b hat das folgende Gleichungssystem a) keine Lösung, b) eine Lösung, c) unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned}2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -8 \\5x_2 - 5x_3 &= 10 \\(a + 2)x_3 &= 4 - b\end{aligned}$$



4. Seien \underline{x}_p und \underline{x}_h partikuläre und homogene Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr oder falsch** sind.
- Mit jeder homogenen Lösung \underline{x}_h ist auch $t\underline{x}_h, t \in \mathbb{R}$ Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{0}$.
 - Mit jeder partikulären Lösung \underline{x}_p ist auch $t\underline{x}_p, t \in \mathbb{R}$ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{b}$.
 - Die partikuläre Lösung ist eindeutig, wenn $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\underline{b}) = n$, n-Anzahl der Unbekannten.
 - Mit jeder partikulären Lösung \underline{x}_p ist auch $\underline{x}_p + t\underline{x}_h, t \in \mathbb{R}$ partikuläre Lösung des LGS.



13 Matrizen & Eigenwerte

1. Können Sie Matrizen addieren, transponieren und mit Vektoren multiplizieren?



2. Wissen Sie, unter welcher Bedingung und wie Sie zwei Matrizen multiplizieren können?



3. Können Sie den Rang einer Matrix bestimmen?

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$



4. Wissen Sie, was die Begriffe regulär, singular und invertierbar bedeuten? (Zwei davon sind gleichbedeutend!)



5. Können Sie die Determinante von 2x2 und 3x3 Matrizen bestimmen? Geht das auch mit dem Entwicklungssatz?



6. Können Sie den Entwicklungssatz zur Bestimmung der Determinante einer 4x4 Matrix anwenden? Nach welcher Art von Zeile/Spalte ist es am einfachsten zu entwickeln?

z.B.

$$\det(A), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

