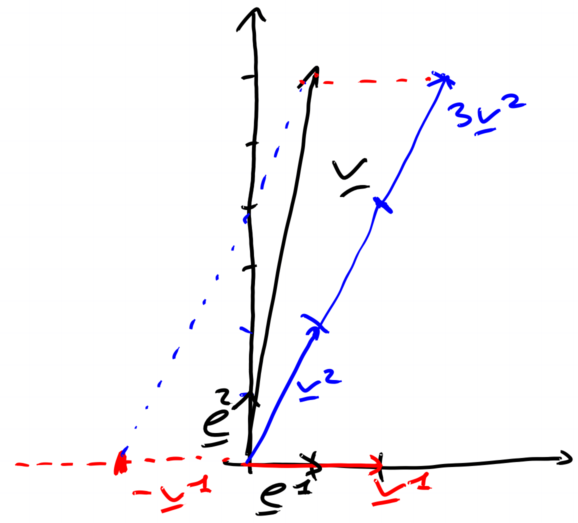


- Basis $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2\}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} = 1\cdot\underline{e}^1 + 6\cdot\underline{e}^2$

  Die Einträge des Vektors sind die Koordinaten bzgl. der Basis bestehend aus $\underline{e}^k$.

- Gegeben sei die Basis B mit $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{v}^3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$

  Wie lautet $\underline{e}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B?

$$\underline{e}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\underline{v}^1 + \lambda_2\underline{v}^2 + \lambda_3\underline{v}^3 = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lll} \lambda_1+\lambda_2=0 & \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 & \\ \lambda_2+\lambda_3=0 & \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_2 = \lambda_1 & \\ \lambda_1+\lambda_3=1 & \Rightarrow 2\lambda_1 = 1 & \Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{1}{2} = \lambda_3,\ \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}_B$$

Bem 6.19

Wichtig: Das Objekt $\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ ist zunächst nur ein Tupel von Zahlen.

Erst zusammen mit einer Basis eines Vektorraumes wird daraus ein Vektor.

Dieser Vektor kann bzgl. verschiedener Basen dargestellt werden.

verschiedene Tupel $\Rightarrow$ gleicher Vektor

Andererseits können verschiedene Basen genutzt werden

gleiche Tupel $\Rightarrow$ verschiedene Vektoren.

Häufig ist die Basis allerdings die aus $\underline{e}^k$ erstellte.

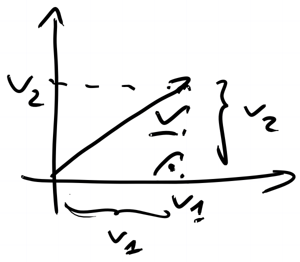
6.2 Skalarprodukt und Anwendungen

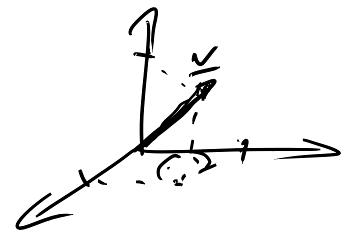
Für dieses Kapitel seien der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, obwohl alle Aussagen auf beliebige Vektorräume übertragbar sind.

Def. 6.20

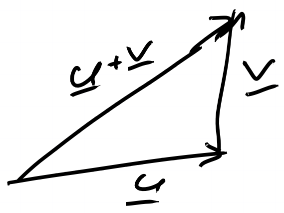
Die Länge oder der Betrag oder die euklidische Norm eines Vektors $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|\underline{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}.$$





Es folgt direkt aus der geometrischen Anschauung die Dreiecksungleichung



$$|\underline{u}+\underline{v}| \leq |\underline{u}|+|\underline{v}|$$ Dreiecksungleichung

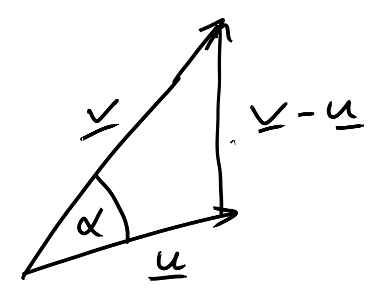
Def. 6.21

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt Einheitsvektor.

Bsp. 6.22

- Für jedes $1 \leq k \leq n$ ist $\underline{e}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$ ($e^k_k = 1$, $e^k_j = 0$ $j \neq k$) ein Einheitsvektor, der sogenannte kanonische Einheitsvektor.
- Zu jedem $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ ein Einheitsvektor in Richtung $\underline{v}$.

In jedem Dreieck gilt der Kosinussatz
(Beweis über Pythagoras und Höhe im Dreieck)



$$|\underline{v}-\underline{u}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (v_k - u_k)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2\sum_{k=1}^n u_k v_k + \sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n u_k v_k = |\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$

Def. 6.23

Das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle := \sum_{k=1}^n u_k v_k = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos(\alpha)$$

mit dem eingeschlossenen Winkel α.

Bem 6.24

Allgemein ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ genau dann ein Skalarprodukt, wenn für beliebige $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Eigenschaften

- $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}$, ← konj. kompl. (Symmetrie, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$)
- $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$, (Additivität bzgl. des ersten Argumentes)
- $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$, (Homogenität — " —)
- $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0} \in V$ (pos. Definitheit)

gelten.

Bsp 6.25

- $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{v}^1, \underline{v}^2 \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$
$$|\underline{v}^1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} = |\underline{v}^2|$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\tfrac{2}{5}\right) \approx 1{,}16 \approx 66{,}4^\circ$$

$\boxed{A}$ · $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{v}^1, \underline{v}^2 \rangle = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \tfrac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ die Vektoren stehen senkrecht aufeinander

Def 6.26

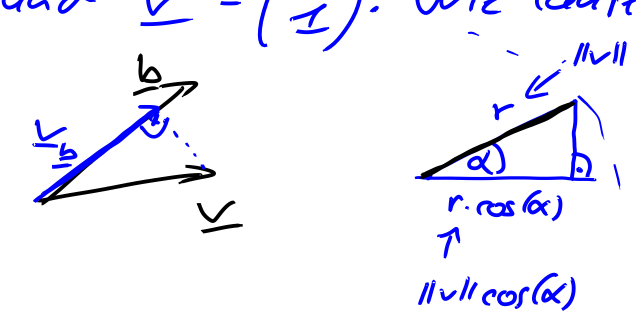
- Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über V definiert eine Vektornorm
$$\|\underline{v}\| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle},$$
d.h. es gilt
  - $\|\underline{v}\| \geq 0$ für alle $\underline{v} \in V$ und $\|\underline{v}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{\theta}$.
  - $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$ für alle $\underline{u}, \underline{v} \in V$
  - $\|\lambda \underline{u}\| = |\lambda| \, \|\underline{u}\|$ für alle $\underline{u} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
- Der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ist das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit
$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|}. \qquad \text{Symbol: } \alpha = \measuredangle(\underline{u}, \underline{v})$$
- Gilt $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$, d.h. $\measuredangle(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{\pi}{2}$, so heißen $\underline{u}$ und $\underline{v}$ senkrecht bzw. orthogonal zueinander. $\underline{u} \perp \underline{v}$
  Ist $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \pm \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|$, so liegen $\underline{u}$ und $\underline{v}$ parallel oder antiparallel zueinander. $\underline{u} \parallel \underline{v}$ $\underline{u} \downarrow\uparrow \underline{v}$

Bem 6.27

- Der Betrag von $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist die euklidische Norm, die vom euklidischen Skalarprodukt erzeugt wird:
$$|\underline{v}| := \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k \cdot v_k} = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} =: \|\underline{v}\|$$
- Die Existenz von α (bzw. $\left|\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|}\right| \leq 1$) folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)
$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|.$$

Bsp 6.28 (Projektion auf Vektor)

Gegeben seien die Vektoren $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wie lautet der auf $\underline{b}$ projizierte Vektor $\underline{v}_{\underline{b}}$?



Für einen Vektor $\underline{a}$ der Länge 1 ($\|\underline{a}\|=1$) gilt

$$\langle \underline{v},\underline{a}\rangle = \|\underline{v}\|\,\|\underline{a}\|\cdot\cos(\alpha) = \|\underline{v}\|\cdot\cos(\alpha) \qquad \alpha = \sphericalangle(\underline{a},\underline{v})$$

Der auf $\underline{a}$ projizierte Vektor $\underline{v}_{\underline{a}} = \langle \underline{v},\underline{a}\rangle\cdot\underline{a}$ (Länge $= |\langle\underline{v},\underline{a}\rangle|$, Richtung $\underline{a}$)

Aber $\underline{a}\neq\underline{b}$. Wähle $\underline{a}=\frac{\underline{b}}{\|\underline{b}\|}$, so folgt

$$\boxed{\underline{v}_{\underline{b}} = \frac{\langle\underline{v},\underline{b}\rangle}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}}$$

Im Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\|\underline{b}\|^2 = 1^2+2^2 = 5\\ \langle\underline{v},\underline{b}\rangle = 1\cdot 3+2\cdot 1 = 5\end{array}\right\} \quad \underline{v}_{\underline{b}} = \frac{5}{5}\cdot\underline{b} = \underline{b}$$

Mit Hilfe einer Basis B lässt sich jeder Vektor $\underline{v}$ eindeutig als Linearkombination

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{b}^1 + \lambda_2\underline{b}^2 + \ldots + \lambda_n\underline{b}^n$$

darstellen, wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ berechnet werden müssen, siehe Bsp. 6.18.

Sind die $\underline{b}^k$ paarweise orthogonal, so heißt $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2, \ldots, \underline{b}^n\}$ eine **Orthogonalbasis** und sind sie zusätzlich noch normiert ($\|\underline{b}^k\|=1$), so heißt sie **Orthonormalbasis (ONB)**.

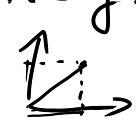
Für eine solche Basis ist die Berechnung der Koeffizienten sehr einfach.

$$\langle\underline{v},\underline{b}^1\rangle = \lambda_1\underbrace{\langle\underline{b}^1,\underline{b}^1\rangle}_{=\|\underline{b}^1\|^2=1} + \lambda_2\underbrace{\langle\underline{b}^2,\underline{b}^1\rangle}_{=0} + \ldots + \lambda_n\underbrace{\langle\underline{b}^n,\underline{b}^1\rangle}_{=0} = \lambda_1$$

Satz 6.29 (Darstellung bzgl. einer ONB)

Es seien $\{\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^n\}$ eine ONB von V und $\underline{v}\in V$ beliebig. Dann gilt

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^{n}\langle\underline{v},\underline{b}^k\rangle\cdot\underline{b}^k.$$



Aber wie erhält man aus einer gegebenen Basis eine ONB?

Idee: Nutze die gegebenen Basisvektoren, ziehe Projektionen entlang bereits gefundener ONB-Vektoren ab und normiere das Ergebnis.

Alg. 6.30 Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt

geg.: Basis $\{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^n\}$ von V

Skalarprodukt: $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to K$

Norm: $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

ges.: ONB $\{\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^n\}$

$$\underline{b}^1 = \frac{\underline{a}^1}{\|\underline{a}^1\|}$$

für $k\in\{2,3,\ldots,n\}$

Projektion von $\underline{a}^k$ auf $\underline{b}^l$

$$\underline{b}^k = \frac{\underline{c}^k}{\|\underline{c}^k\|} \quad \text{wobei} \quad \underline{c}^k = \underline{a}^k - \sum_{l=1}^{k-1}\langle\underline{a}^k,\underline{b}^l\rangle\,\underline{b}^l$$

$\underline{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{b}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{c}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$