Def. 7.53

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass $\Lambda = S^{-1} A S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix ist.

Bem. 7.54

Ist A symmetrisch, so ist A diagonalisierbar, siehe Satz 7.51, und $S = Q$ ist die orthogonale Matrix bestehend aus EV von A.

Satz 7.55

Lässt sich das charakteristische Polynom χ_A als Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{K}$ schreiben, so ist A genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden EW die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. S kann dann spaltenweise aus den n EV gebildet werden.

- In $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt χ_A immer in Linearfaktoren (Fundamentalsatz d. Algebra)
- zerfällt χ_A in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren, so gibt es einen quadratischen Faktor und somit einen nichtreelle EW. Dann ist A nicht diagonalisierbar.

Bem 7.56

Ist eine große Potenz einer Matrix A zu berechnen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ges: A^{2024}, so ist der direkte Weg sehr aufwendig. Cleverer ist

$$\Lambda = S^{-1} A S \iff A = S \Lambda S^{-1}$$

zu nutzen, denn es gilt:

$$A^k = (S \Lambda S^{-1})^k = \underbrace{S \Lambda \overbrace{(S^{-1} S)}^{=E} \Lambda (S^{-1} \cdots S) \Lambda S^{-1}}_{k\text{-mal}}$$

$$= S \Lambda^k S^{-1},$$

wobei die Potenz einer Diagonalmatrix (Λ) die Diagonalmatrix der Potenzen ist.

Mit ($\nearrow$ Bsp 7.52)

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{2024} = \begin{pmatrix} 1^{2024} & 0 \\ 0 & 3^{2024} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2024} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2024} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^{2024} & -1 + 3^{2024} \\ -1 + 3^{2024} & 1 + 3^{2024} \end{pmatrix}$$

7.5 Positive Definitheit, Hauptachsentransformation

Anwendung 1: Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ($A = A^T$), so gilt mit den EW/EV $\lambda_i, \underline{v}^i, i \in \{1, \dots, n\}$ für einen beliebigen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$$\mathbb{R} \ni \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T S \Lambda S^T \underline{x} \quad , \quad \left(\text{mit } \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),\ S = (\underline{v}^1 \cdots \underline{v}^n),\ \|\underline{v}^1\| = 1 \right)$$

$$= (S^T \underline{x})^T \Lambda \underbrace{(S^T \underline{x})}_{=:\underline{y}} \quad , \quad \underline{y} \neq \underline{0}$$

$$= \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

Def 7.57

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine (symmetrische) Matrix, so dass für jeden Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\underline{x}^T A \underline{x} > 0$$

gilt, so heißt A (symmetrisch) positiv definit (s.p.d.). Gilt nur

$$\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0$$

so heißt A positiv semidefinit. Analog werden negativ definit, negativ semidefinit definiert.

Bem 7.58

- Ist A s.p.d., so sind alle EW $\lambda > 0$.
- Ist A symmetrisch und sind alle EW $\lambda > 0$ ist A s.p.d.
- Außerdem ist eine s.p.d. Matrix A regulär, denn mit Satz 7.51 folgt

$$A = S \Lambda S^T \Leftrightarrow A^{-1} = (S \Lambda S^T)^{-1} = S^{-T} \Lambda^{-1} S^{-1} = S \Lambda^{-1} S^T$$

mit $\Lambda^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

Anwendung 2 Kegelschnitte

Kreis $\quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Ellipse $\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Hyperbel $\quad \pm\left(\frac{x}{a}\right)^2 \mp \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = \pm a^2b^2$

Parabel $\quad x^2 = 2py$ oder $y^2 = 2px$

Aber welche Kurve repräsentiert

$$0 = 9x^2 - 4xy + 6y^2 - 32x - 4y + 24 \Leftrightarrow 0 = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} - \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \underline{x} + 24$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Def 7.59

Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^T$ heißt für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

Da A symmetrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus EV von A und eine Diagonalmatrix $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ aus EW von A mit

$$A = Q \Lambda Q^T$$

Dann folgt

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \underbrace{(\underline{x}^T Q)}_{= \underline{y}^T} \Lambda \underbrace{(Q^T \underline{x})}_{=: \underline{y}} = \underline{y}^T \Lambda \underline{y} =: \hat{q}(\underline{y}).$$

Dies ist die Normalform der quadratischen Form und die Transformation von $q(\underline{x})$ zu $\hat{q}(\underline{y})$ wird Hauptachsentransformation genannt.

Geometrisch wird im Prinzip nur das Koordinatensystem gewechselt, indem die orthonormierten EV von A (Spalten von Q) als neue Achsen genutzt werden.

Der Typ des Kegelschnittes kann an den EW von A abgelesen werden.

Bsp 7.60

$$q(\underline{x}) = x_1^2 + \underset{\substack{\uparrow\\4+4}}{8} x_1 x_2 + 7x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda) - 16$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda - 9$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 : \quad (A+E)\underline{v} = \underline{0}$$

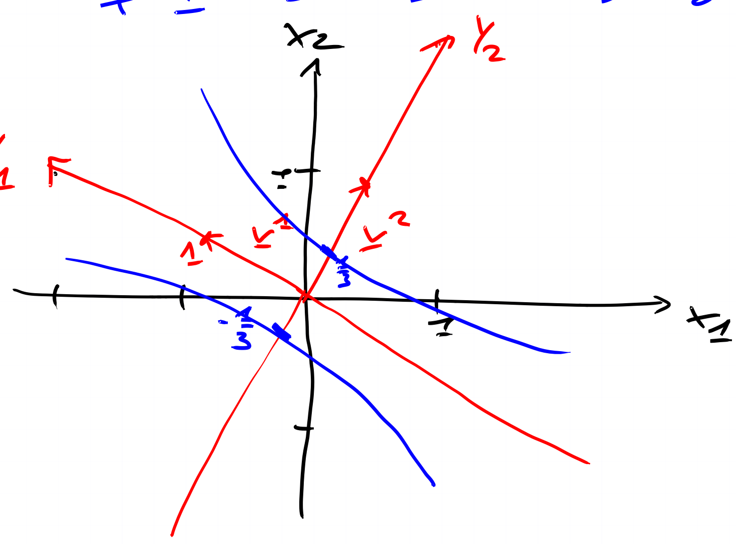
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{8} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \neq \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{v}^2 \perp \underline{v}^1 \Rightarrow \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A ist indefinit (nicht pos, nicht neg definit)

$$\tilde{q}(\underline{y}) = \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = -y_1^2 + 9y_2^2 = 1 \qquad \text{Hyperbel}$$



Def 7.61

Eine Quadrik ist eine allgemeine Gleichung 2. Ordnung der Form

$$\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{m}^T \underline{x} + c = 0$$

mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, die eine Kurve/Fläche/Hyperfläche beschreibt.

Die zu einer Quadrik gehörige Normalform erhalten wir in 2 Schritten:

1) Verschiebung: Löse $A\underline{s} = -\underline{m}$ nach $\underline{s}$ und setze

$$\underline{x} = \underline{r} + \underline{s} \quad (\text{Verschiebung } \underline{s}$$
neue Koordinaten $\underline{r}$)

Einsetzen von $\underline{x}$ in Quadrik ergibt in $\underline{r}$

$$\underline{r}^T A \underline{r} + \underbrace{(c + \underline{m}^T \underline{s})}_{=: g \in \mathbb{R}} = 0$$

also eine quadratische Form in $\underline{r}$ (Lineare Term weg)

(Bem. Das System $A\underline{s} = -\underline{m}$ muss nicht lösbar sein $\rightarrow$ hier nicht)

2) Hauptachsentransf. gemischte Terme eliminieren $\Rightarrow$ $\underline{y} = Q^T \underline{r}$ mit

$$\underline{y}^T \Lambda \underline{y} + g = 0$$

Bsp 7.62

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 - 4x_2 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{w}^T\underline{x} + c = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c = 24$

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{II+3I}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ 25 & 0 & 50 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ A, $\uparrow$ $-\underline{w}$

$$\boxed{\underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2) $\underline{r}^T A \underline{r} + g = 0$, $\quad g = 24 + \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$

$\chi_A(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$

$\lambda_1 = 5$: $\left(\begin{array}{cc|c} \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{v}^1 \perp \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $\underline{r} = Q \cdot \underline{y}$

$\hat{q}(\underline{y}) = \boxed{5y_1^2 + 10y_2^2 = 10} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y_2^2 = 1}$

$\Rightarrow$ Ellipse, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$

Gezeichnet wird nacheinander:

1) Koordinatensystem (x_1, x_2)

2) verschobenes Koordinatensystem (r_1, r_2) mit $\underline{r} = \underline{x} - \underline{s}$

3) gedrehtes, verschobenes Koordinatensystem (y_1, y_2) mit $\underline{y} = Q^T \underline{r}$

4) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Ellipse in $\underline{y}$