Bsp 7.62

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 - 4x_2 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{w}^T \underline{x} + c = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c = 24$

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\left|\;\underbrace{\begin{matrix} 16 \\ 2 \end{matrix}}_{-\underline{w}}\right. \;\underset{II+3I}{\Leftrightarrow}\; \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ 25 & 0 & 50 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2) $\underline{r}^T A \underline{r} + q = 0$, $\quad q = 24 + \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$

$$\chi_A(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10$$

$\lambda_1 = 5$: $\left(\begin{array}{cc|c} \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{v}^1 \perp \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $\underline{r} = Q \cdot \underline{y}$

$$\hat{q}(\underline{y}) : \boxed{5y_1^2 + 10y_2^2 = 10} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y_2^2 = 1}$$

$\Rightarrow$ Ellipse, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$

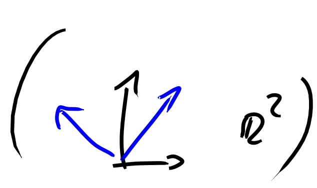
Gezeichnet wird nacheinander:

1) Koordinatensystem (x_1, x_2)
2) verschobenes Koordinatensystem (r_1, r_2) mit $\underline{r} = \underline{x} - \underline{s}$
3) gedrehtes, verschobenes Koordinatensystem (y_1, y_2) mit $\underline{y} = Q^T \underline{r}$
4) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Ellipse in $\underline{y}$

7.6 Anwendungen in der Mechanik

Kinematik:
- Basiswechsel
- Rotationen in $\mathbb{R}^3$

Angenommen wir haben in $\mathbb{R}^3$ zwei ONB



$$B = (\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3), \quad \langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C = (\underline{c}^1, \underline{c}^2, \underline{c}^3), \quad \langle \underline{c}^i, \underline{c}^j \rangle = \delta_{ij}$$

und einen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Diesen können wir bzgl. der Basen darstellen, d.h.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$$

bzw.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_C \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \underline{b}^i = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot \underline{c}^j$$

Stellen wir die Basisvektoren $\underline{c}^j$ bzgl. der Basis B dar, so erhalten wir

$$\underline{c}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}_B = a_{1j} \cdot \underline{b}^1 + a_{2j} \cdot \underline{b}^2 + a_{3j} \cdot \underline{b}^3.$$

Diese Koeffizienten a_{ij} können mittels des Skalarproduktes berechnet werden:

$$\langle \underline{c}^j, \underline{b}^i\rangle = a_{1j}\cdot\langle \underline{b}^1,\underline{b}^i\rangle + a_{2j}\langle \underline{b}^2,\underline{b}^i\rangle + a_{3j}\langle \underline{b}^3,\underline{b}^i\rangle = a_{ij}.$$

Es folgt somit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_C = y_1\cdot\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}_B + y_2\cdot\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}_B + y_3\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}_B$$

$$= A\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = A\cdot\underline{x}_C$$

mit $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle \underline{b}^1,\underline{c}^1\rangle & \langle \underline{b}^1,\underline{c}^2\rangle & \langle \underline{b}^1,\underline{c}^3\rangle\\ \langle \underline{b}^2,\underline{c}^1\rangle & \langle \underline{b}^2,\underline{c}^2\rangle & \langle \underline{b}^2,\underline{c}^3\rangle\\ \langle \underline{b}^3,\underline{c}^1\rangle & \langle \underline{b}^3,\underline{c}^2\rangle & \langle \underline{b}^3,\underline{c}^3\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{c}^1_B & \underline{c}^2_B & \underline{c}^3_B\end{pmatrix}$

Basisvektoren aus C bzgl. Basis B dargestellt

$\Rightarrow$ Der Basiswechsel kann mit

$$\underline{x}_B = A\cdot\underline{x}_C$$

beschrieben werden.

Ganz analog folgt folgt

$$\underline{x}_C = A^{-1}\underline{x}_B$$

mit $A^{-1} = \begin{pmatrix}\langle \underline{c}^1,\underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^1,\underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^1,\underline{b}^3\rangle\\ \langle \underline{c}^2,\underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^2,\underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^2,\underline{b}^3\rangle\\ \langle \underline{c}^3,\underline{b}^1\rangle & \langle \underline{c}^3,\underline{b}^2\rangle & \langle \underline{c}^3,\underline{b}^3\rangle\end{pmatrix} = A^T$

Satz 7.63

Es seien B und C zwei ONB in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Matrix $A=(a_{ij})$ mit $a_{ij} = \langle \underline{b}^i, \underline{c}^j\rangle$, welche den Basiswechsel $\underline{x}_B = A\underline{x}_C$ für jeden Vektor $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ beschreibt, orthogonal.

Wir können $A\cdot\underline{x}$ auf zwei Arten interpretieren (A orthogonal)

- Basiswechsel
- Abbildung $\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \underline{y} = A\cdot\underline{x}\in\mathbb{R}^3$

Bem 7.64

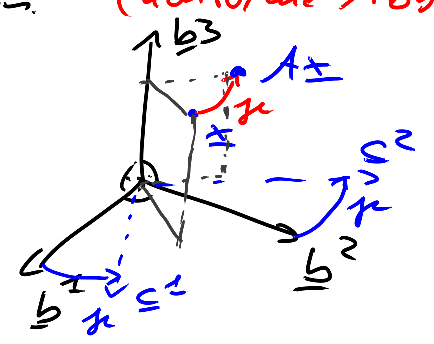
Für zwei Vektoren $\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$, die einen Winkel α einschließen und die mit einer orthogonale Matrix A multiplizierten Vektoren $A\underline{x}, A\underline{y}\in\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle A\underline{x}, A\underline{y}\rangle = (A\underline{x})^T A\underline{y} = \underline{x}^T\underbrace{A^TA}_{=E}\underline{y} = \underline{x}^T\underline{y} = \langle\underline{x},\underline{y}\rangle$$

$$= \|\underline{x}\|\|\underline{y}\|\cos(\alpha)$$

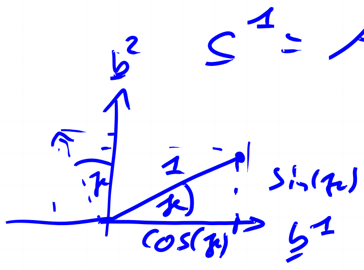
$$\|A\underline{x}\|^2 = \langle A\underline{x}, A\underline{x}\rangle = \langle\underline{x},\underline{x}\rangle = \|\underline{x}\|^2,$$

d.h. die Abbildung $\underline{x}\mapsto A\underline{x}$ erhält Winkel und Längen. (konforme Abbildung)



Bsp 7.65 Geg. sei eine ONB B und A beschreibe eine Drehung um einen Winkel φ mit der Drehachse $\underline{b}^3$. Wie lautet A?

Um die Matrix zu beschreiben müssen wir nur die Abbildung für die Basisvektoren $\underline{b}^i$ beschreiben. Es gilt



$$\underline{s}^1 = A \cdot \underline{b}^1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \underline{s}^2 = A \cdot \underline{b}^2 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \underline{s}^3 = A \cdot \underline{b}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \underline{b}^3$$

$\sim$ Multiplikation mit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ bzw. Matrixversion

$$\Rightarrow \quad A = \left(\underline{s}^1_B \; \underline{s}^2_B \; \underline{s}^3_B \right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

Genauso kann eine Drehung um b^2 mit Winkel β betrachtet werden:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

oder um Drehachse $\underline{b}^1$ mit Winkel α:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1$$

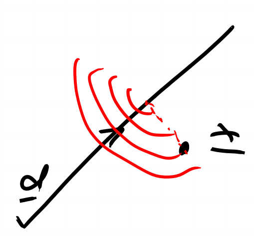
Mit diesen drei Elementardrehungen kann jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschrieben werden ($\to$ Eulerschen Drehwinkel)

Wie sieht die Drehmatrix D zu einer Drehung um eine beliebige Drehachse $\underline{d}$ (mit $\|\underline{d}\| = 1$) und Winkel φ aus?

Eine solche Matrix muss die Drehachse erhalten:

$$D\underline{d} = \underline{d}$$

Betrachten wir nun einen Punkt $\underline{x}$ außerhalb der Drehachse.



Die Drehung lässt den Anteil von $\underline{x}$ invariant, der parallel zu $\underline{d}$ ist und dreht nur den zu $\underline{d}$ senkrechten Anteil.

Diese Ideen lassen sich mit folgender Formel beschreiben

$$D\underline{x} = \underline{d}\,\underline{d}^T\underline{x} + \left(\cos(\varphi)\left(E - \underline{d}\,\underline{d}^T\right) + \sin(\varphi)\, S_{\underline{d}} \right)\underline{x}$$

wobei:

$$S_{\underline{d}}\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} x = \underline{d} \times \underline{x}$$

die zum Kreuzprodukt gehörige Matrixdarstellung $\nearrow$ Bem. 7.13. Für diese gilt

$$S_{\underline{d}}^T = -S_{\underline{d}}.$$

Drehachse:

$$D\underline{d} = \underline{d}\,\underbrace{\underline{d}^T\underline{d}}_{\|\underline{d}\|=1} + \cos(\varphi)\left(E - \underline{d}\,\underline{d}^T\right)\underline{d} + \sin(\varphi)\, S_{\underline{d}}\,\underline{d}$$

$$= \underline{d} + \cos(\varphi) \cdot \underbrace{\left(\underline{d} - \underline{d}\right)}_{=0} + \sin(\varphi)\underbrace{\left(\underline{d} \times \underline{d}\right)}_{=0} = \underline{d}$$

Die zur Drehung um $-\varphi$ gehörige Matrix ist dann

$$\underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(-\varphi)\left(E - \underline{d}\,\underline{d}^T\right) + \sin(-\varphi)\, S_{\underline{d}}$$

$$= \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)\left(E - \underline{d}\,\underline{d}^T\right) + \sin(\varphi)\left(-S_{\underline{d}}\right) = D^T$$

und es folgt (nachrechnen 8) $D D^T = E$

$\Rightarrow$ die allg. Rotationsmatrix ist orthogonal.

Satz 7.66

Jede orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(Q)=1$ ist eine Drehmatrix zu einer Drehachse $\underline{d}$ und einem Winkel φ.

Die Drehachse lässt sich relativ leicht bestimmen:

$$Q - E = Q - QQ^T = Q(E - Q^T) = Q(E-Q)^T$$

$$\Rightarrow \det(Q-E) = \det(Q)\cdot\det(E-Q) = 1\cdot(-1)^3\cdot\det(Q-E) = -\det(Q-E)$$

$$\Rightarrow \det(Q-E) = \det(Q - \lambda E) = 0, \quad \lambda = 1 \quad \Rightarrow \text{norm. EV sei } \underline{d}$$

Der Nachweis, dass Q eine (allg.) Drehmatrix ist, kann mit einer Transformation auf ein Koordinatensystem mit $\underline{d}$ als eine Richtung geführt werden.

Für die Berechnung des Winkels φ schauen wir uns den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Anteil von Q an:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(Q+Q^T) &= \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)(E - \underline{d}\,\underline{d}^T) \\ \tfrac{1}{2}(Q-Q^T) &= \sin(\varphi)\, S_{\underline{d}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi$$

Bsp 7.67

Geg. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad AA^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E$

$\det(A) = 1$

$\Downarrow$

$\underline{d}?\ \varphi?$

Achse: $(A-E)\underline{d} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\underline{d} = \underline{0} \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\underline{d} = \underline{0}$

$$\boxed{\underline{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Winkel: $\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \sin(\varphi)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_{\underline{d}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3}}$$

$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underline{d}\,\underline{d}^T + \cos(\varphi)(E - \underline{d}\,\underline{d}^T)$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(\varphi) & 1-\cos(\varphi) & 0 \\ 1-\cos(\varphi) & 1+\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{\cos(\varphi) = -\frac{1}{3}} \qquad \Rightarrow \varphi = 1.9106 \approx 109.5^\circ$

ENDE