Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

2. Woche – Logik, Quantoren, Beweise

Logik

Z A1 [1] Überprüfen Sie die Regel $p \Leftrightarrow q \quad = \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, s. Folie F 1_2, mit der Wahrheitstafel.

Z A2 Beweisen Sie durch elementare Umformungen die sogenannte Kontraposition (bzw. den Umkehrschluss), s. auch Beweisprinzipien VL Abschnitt 1.3.

$$p \Rightarrow q \quad = \quad \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$$

Lösung: $p \Rightarrow q \quad = \quad \bar{p} \vee q \quad = \quad \bar{p} \vee \bar{\bar{q}} \quad = \quad \bar{\bar{q}} \vee \bar{p} \quad = \quad \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

Z A3 Stellen Sie (mit gesundem Menschenverstand) je eine Wahrheitstafel für die Aussagen 'p ist hinreichend für q' und für 'q ist notwendig für p' auf!
Hinweis: Aussageform-'Denke': 'p ist hinreichend für q'$= F(p,q)$ kann für verschiedene Belegungen von p und q verschiedene Werte annehmen. Sie sollen diese Werte in der Wahrheitstafel zusammentragen.
Vergleichen Sie anschließend mit der Wahrheitstafel von $p \Rightarrow q$. **Lösung:** Bedeutung 'hinreichend' und 'notwendig':

$$\text{'a ist hinreichend für b'} \; = (a \Rightarrow b)$$

$$\text{'b ist notwendig für a'} \; = (\bar{b} \Rightarrow \bar{a})$$

Z A4 Welche der stets wahren Implikationen aus Aufgabe 1.5 a,b,c ist ein Paradebeispiel für 'aus Falschem folgt Beliebiges', s. VL Bem. 1.10 ? **Lösung:** 1.5. c .

A5 Wie viele verschiedene zweistellige Aussageformen $F(p,q)$ gibt es (d.h. wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Wahrheitstabelle zu füllen)? (Begründung!)

Lösung: $2^4 = 16$.
Für jedes der 4 Felder in der Wahrheitstafel zwei Möglichkeiten: wahr/falsch

A6 [Zusatz] In digitalen Schaltungen sind sogenannte NAND-Gatter ($\overline{p \wedge q}$ - Schaltungen) Basisbausteine. Denken Sie sich je eine Schaltung aus (Kopplung von) NAND-Gattern zur Realisierung einer Negation, $\bar{p}$, und einer Disjunktion, $p \vee q$, aus.

[1] Z A - Aufgabe wird in der Zentralübung bearbeitet.

Lösung: $\overline{p} = \overline{p \wedge p}$ (*) bzw. $p \vee q = \overline{\overline{p \vee q}} = \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} \overset{(*)}{=} \overline{\overline{p \wedge p} \wedge \overline{q \wedge q}}$, a. auch Systemtheorie S. 244.

Beweise

Z A7 Beweisen Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel (zweier reeller Zahlen)

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

einmal direkt und einmal indirekt.

Lösung:
Beweis **direkt**:

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & (a-b)^2 & \geq & 0 & +(a+b)^2 \\
\Leftrightarrow & 2(a^2+b^2) & \geq & (a+b)^2 & :4 \\
\Leftrightarrow & \frac{a^2+b^2}{2} & \geq & \frac{(a+b)^2}{4} & \surd \\
\Leftrightarrow^{3} & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & \geq & \frac{|a+b|}{2} & \text{da } |a+b| \geq a+b \\
\Rightarrow & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & \geq & \frac{a+b}{2} \text{ q.e.d.} &
\end{array}$$

Zugegeben, auf den Anfang kommt man kaum. Direkte Beweise sind oft 'rückwärts aufgeschrieben', was man vom Ziel ausgehend gefunden hat.

Beweis **indirekt**: Angenommen

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & < & \frac{a+b}{2} & (.)^2 \\
\Rightarrow & \frac{a^2+b^2}{2} & < & \frac{(a+b)^2}{4} & \cdot 4 \\
\Leftrightarrow & 2(a^2+b^2) & < & (a+b)^2 & -(a+b)^2 \\
\Leftrightarrow & (a-b)^2 & < & 0 \ \lightning & \text{Widerspruch } \Rightarrow \text{ Annahme war falsch.}
\end{array}$$

[5]Wurzelziehen ist eine äquivalente Operation, wenn auf positive Zahlen angewandt.