Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

3. Woche – vollständige Induktion und Mengen, Relationen, Abbildungen

Beweise mit vollständiger Induktion

Z A1 Bernoulische Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

(a) Veranschaulichen Sie die Ungleichung für $n = 0, 1, 2$ (Graphen der Funktionen 'links' und 'rechts' des Relationszeichens skizzieren).

(b) Beweisen Sie die Ungleichung mittels vollständiger Induktion.

Lösung: s. Wikipedia

A2 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.

(b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

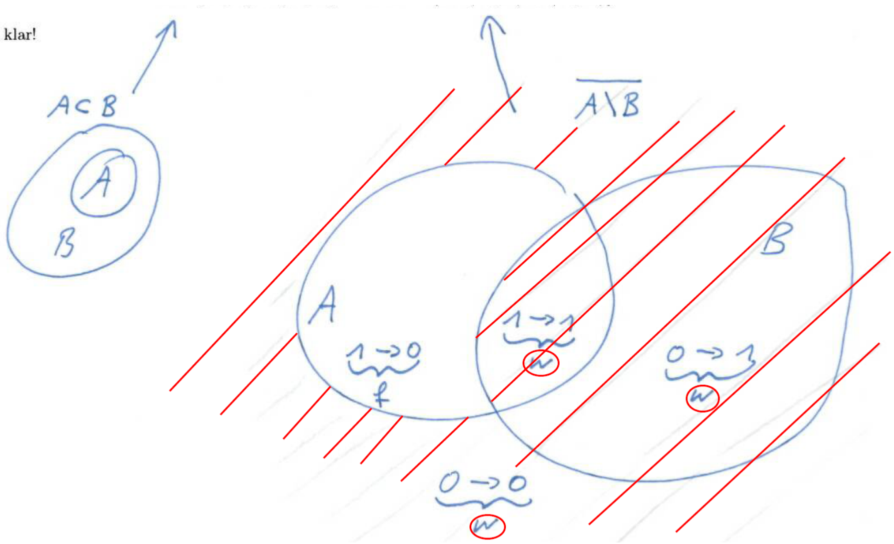
Zusatz: $2^n > n^2$ für $n \geq 5$.

Lösung: s. File induktion-aufgaben-loesungen A2, B18, C1, D5

Mengen, Relationen, Abbildungen

Z A3 Machen Sie sich anhand zweier Venn-Diagramme den Unterschied zwischen

$$\forall x: \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \qquad \text{und} \qquad \{x: \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\} \text{ klar!}$$



Lösung:
Links steht eine Aussage (über Mengen), nämlich $A \subset B$ und rechts die Beschreibung einer speziellen Menge, nämlich der rot-schraffierten im Bild.

A4 Skizzieren Sie die kartesischen Produkte a) $[1, 2] \times [3, 4]$ und b) $\{1, 2\} \times [3, 4]$.
Zeichnen Sie in das Ergebnis von (a) eine Relation und eine Funktion ein.

A5 Gegeben ist folgende Relation:
Zwei natürliche Zahlen x, y stehen zueinander in Relation $x \underset{R}{\sim} y$, wenn $x|y$ (x teilt y).

(a) Veranschaulichen Sie die Relation mit Hilfe einer Tabelle beispielsweise mit den Zahlen 1 bis 8 (wie in VL 1_5, Bsp. 1.33).

(b) Welche Eigenschaften besitzt die Relation (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv)?

Zusatz Falls es sich um eine Ordnungsrelation handelt ;-), veranschaulichen Sie die Ordnung durch einen (gerichteten) Graphen, der die Zahlen der Reihe nach verbindet, die in Relation stehen.

Lösung: a) s. VL-Folie 1_7.
b) reflexiv: x teilt x, antisymmetrisch: x teilt y und y teilt x $\Rightarrow x = y$,
transitiv: x teilt y und y teilt z $\Rightarrow$ x teilt z.
Zusatz: Ein Graph, in dem die Zahlen umso 'höher' stehen, je mehr Faktoren sie haben.

A6 Gegeben ist folgende Relation:
Zwei ET-Studenten x, y des Jahrgangs 2025 stehen zueinander in Relation $x \underset{R}{\sim} y$, wenn Sie in der gleichen Seminargruppe sind.

(a) Ist das eine Äquivalenzrelation?

(b) Handelt es sich um eine Ordnungsrelation?

Zusatz Was bedeutet die Aussage: 'Die Mengen A,B sind **disjunkt**.'?
Sind zwei verschiedene Seminargruppen zueinander disjunkt?

Lösung: a) Ja, da die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
b) Nein, da nicht antisymmetrisch.

A7 Geben Sie a) die Anzahl aller möglichen, b) die Anzahl aller **surjektiven** und c) die Anzahl aller **bijektiven** Abbildungen zwischen zwei drei-elementigen Mengen an.

Lösung: a) $3^3 = 27$, b), c) $3! = 6$ das ist die Anzahl der Permutationen (Vertauschungen) der 3 Elemente.

Wiederholung

A8 Übersetzen Sie die Aussage: 'Wenn A, dann B.' in

(a) ... ist hinreichend für ...

(b) ... ist notwendig für ...

(c) ... $\Rightarrow$ ....

Lösung:

(a) A ist hinreichend für B

(b) B ist notwendig für A

(c) $A \Rightarrow B$.