

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

5. Woche – Parabel, Kreis, Ellipse, quadratische Ergänzung, Polynome, Nullstellen

Äquivalente, zulässige und unzulässige Umformungen

- A1** Welche der folgenden Umformungen sind äquivalent, zulässig bzw. unzulässig?
 Kennzeichnen Sie dies mit \Leftrightarrow , \Rightarrow bzw. \nRightarrow .
 In welchem der Fälle muss am Ende eine Probe gemacht werden?

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 x = 3 & x^2 = 9 & x^2 = 9 & |x| = 3 \\
 x^2 = 9 & x = 3 & |x| = 3 & (x = 3) \vee (x = -3)
 \end{array}$$

Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung

- Z A2** Stellen Sie eine Gleichungen für

- (a) eine 'nach oben bzw. nach unten geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (b) eine 'nach links bzw. nach rechts geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (c) für alle Fälle in (a,b) mit dem Scheitel in $S(1, 2)$ auf.

- A3** Stellen Sie die Gleichungen für folgende Kegelschnitte auf:

- (a) Kreis: Mittelpunkt $M(3, 5)$, Radius $r = 8$,
- (b) Ellipse: Mittelpunkt $M(0, 0)$, Halbachsen $a = 11$, $b = 8$.

- Z A4** Bestimmen Sie Art und Lage der folgenden Kegelschnitte (Kreise, Parabeln, ...).
 Hinweis: überführen Sie dazu mittels "quadratischer Ergänzung" die Gleichungen in ihre jeweilige Grundform.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$ b) $y^2 - 6y = -x + 3$

- Z A5** Analog zur **parametrischen Beschreibung**

- einer Geraden $z = z_0 + r e^{i\varphi_0}$ (φ_0 fix und $r \in \mathbb{R}$ variabel), s. [2.21](#)

lässt sich auch eine parametrische Beschreibung

- eines Kreises $z = z_0 + r e^{i\varphi}$ bzw. $\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z - z_0) = r \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z - z_0) = r \sin(\varphi) \end{array}$ (r fix und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ variabel)
 sowie
- einer Ellipse $\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z - z_0) = a \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z - z_0) = b \sin(\varphi) \end{array}$, s. auch [TET2 S.47](#)

angeben.

Leiten Sie jeweils aus der parametrischen Beschreibung die parameterfreie Beschreibung für
 Kreis: $(\operatorname{Re}(z - z_0))^2 + (\operatorname{Im}(z - z_0))^2 = r^2$ und Ellipse: $\frac{(\operatorname{Re}(z - z_0))^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}(z - z_0))^2}{b^2} = 1$ her, s. [2.21](#).

- A6 Zusatz:** Stellen Sie die Gleichungen all der Kreise auf, die die Koordinatenachsen berühren und durch den Punkt $P(1, 2)$ gehen. Geben Sie die zugehörigen Mittelpunkte und Radien an.

A7 Zusatz: Das letzte Beispiel in 2.22 zeigt, dass alle Punkte z , deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen, z_1, z_2 , in einem bestimmten Verhältnis, α , zueinander stehen (für $\alpha \neq 1$) auf einem Kreis liegen:

$$\|z - z_2\| = \alpha \|z - z_1\|$$

Konkret wurde für 'Gegeben': $z_1 = 1, z_2 = i$ und $\alpha = 2$ der Radius R und der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt.

Im Fach Theoretische Elektrotechnik wird die gleiche Tatsache jedoch mit geändertem 'Gegeben' und 'Gesucht' genutzt: die zweite Zeile in TET1 S.107 können wir übertragen auf unseren Kontext als:

$$\|z - s_2\| = \alpha \|z - s_1\| \quad (0.1)$$

notieren mit 'Gegeben': $z_1 = s_1, M = 0, R$ (also $z = R e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi]$) und 'Gesucht': s_2 und α .

Verifizieren Sie die Lösung $s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1$, d.h. überprüfen Sie, dass die Gleichung (0.1) mit $z = R e^{i\varphi}$ für dieses s_2, α gilt.

Polynome, Nullstellen

A8 (a) Geben Sie ein Polynom mit den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.
 (b) Geben Sie ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** und den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.

A9 Gegeben ist ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl reeller und die Anzahl komplexer Nullstellen an.

A10 Zusatz: Beweisen Sie Bem. 2.27 3) :

Ist z nichtreelle Nullstelle des reellen Polynoms $P(z)$, so ist \bar{z} ebenfalls eine Nullstelle.
 bzw.

Nullstellen treten in Polynomen mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

Zeigen Sie zu diesem Zweck zunächst: $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$ und somit, dass $a_n(\bar{z})^n = \overline{(a_n z^n)}$.
 Was folgt daraus für $P(\bar{z})$? ($P(z) = ?!$)