Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. Kurzlösung)

5. Woche – Parabel, Kreis, Ellipse, quadratische Ergänzung, Polynome, Nullstellen

Äquivalente, zulässige und unzulässige Umformungen

A1 Welche der folgenden Umformungen sind äquivalent, zulässig bzw. unzulässig?
Kennzeichnen Sie dies mit $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ bzw. $\not\Rightarrow$.
In welchem der Fälle muss am Ende eine Probe gemacht werden?

$x = 3$	$x^2 = 9$	$x^2 = 9$	$\lvert x\rvert = 3$
$x^2 = 9$	$x = 3$	$\lvert x\rvert = 3$	$(x = 3) \vee (x = -3)$

Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung

Z A2 Stellen Sie eine Gleichungen für

(a) eine 'nach oben bzw. nach unten geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0,0)$,

(b) eine 'nach links bzw. nach rechts geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0,0)$,

(c) für alle Fälle in (a,b) mit dem Scheitel in $S(1,2)$ auf.

A3 Stellen Sie die Gleichungen für folgende Kegelschnitte auf:

(a) Kreis: Mittelpunkt $M(3,5)$, Radius $r = 8$,

(b) Ellipse: Mittelpunkt $M(0,0)$, Halbachsen $a = 11$, $b = 8$.

Z A4 Bestimmen Sie Art und Lage der folgenden Kegelschnitte (Kreise, Parabeln, ...).
Hinweis: überführen Sie dazu mittels "quadratischer Ergänzung" die Gleichungen in ihre jeweilige Grundform.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$ b) $y^2 - 6y = -x + 3$

Z A5 Analog zur **parametrischen Beschreibung**

- einer Geraden $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$ (φ_0 fix und $r \in \mathbb{R}$ variabel), s. 2.21

lässt sich auch eine parametrische Beschreibung

- eines Kreises $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ bzw. $\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z-z_0) & = r\cos(\varphi) \\ \mathrm{Im}(z-z_0) & = r\sin(\varphi) \end{array}$ (r fix und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ variabel)
  sowie
- einer Ellipse $\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z-z_0) & = a\cos(\varphi) \\ \mathrm{Im}(z-z_0) & = b\sin(\varphi) \end{array}$, s. auch TET2 S.47

angeben.
Leiten Sie jeweils aus der parametrischen Beschreibung die parameterfreie Beschreibung für Kreis: $(\mathrm{Re}(z-z_0))^2 + (\mathrm{Im}(z-z_0))^2 = r^2$ und Ellipse: $\frac{(\mathrm{Re}(z-z_0))^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{Im}(z-z_0))^2}{b^2} = 1$ her, s. 2.21.

Kurzlösung: Trigonometrischen Pythagoras verwenden $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$.

A6 **Zusatz:** Stellen Sie die Gleichungen all der Kreise auf, die die Koordinatenachsen berühren und durch den Punkt $P(1,2)$ gehen. Geben Sie die zugehörigen Mittelpunkte und Radien an.

A7 **Zusatz:** Das letzte Beispiel in 2.22 zeigt, dass alle Punkte z, deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen, z_1, z_2, in einem bestimmten Verhältnis, α, zueinander stehen (für $\alpha \neq 1$) auf einem Kreis liegen:

$$\|z - z_2\| = \alpha \|z - z_1\|$$

Konkret wurde für 'Gegeben': $z_1 = 1, z_2 = i$ und $\alpha = 2$ der Radius R und der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt.

Im Fach Theoretische Elektrotechnik wird die gleiche Tatsache jedoch mit geändertem 'Gegeben' und 'Gesucht' genutzt: die zweite Zeile in TET1 S.107 können wir übertragen auf unseren Kontext als:

$$\|z - s_2\| = \alpha \|z - s_1\| \tag{0.1}$$

notieren mit 'Gegeben': $z_1 = s_1$, $M = 0, R$ (also $z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$) und 'Gesucht': s_2 und α.

Verifizieren Sie die Lösung $s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1$, d.h. überprüfen Sie, dass die Gleichung (0.1) mit $z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ für dieses s_2, α gilt.

Kurzlösung:

$$\begin{aligned} & \|z - s_2\| = \alpha \|z - s_1\| \text{ mit } z = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}, s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1 \\ \Leftrightarrow\ & \|R\,\mathrm{e}^{i\varphi} - R^2/s_1\| = R/s_1 \|R\,\mathrm{e}^{i\varphi} - s_1\| \\ & = \dots \end{aligned}$$

Polynome, Nullstellen

A8 (a) Geben Sie ein Polynom mit den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$ an.

(b) Geben Sie ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** und den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$ an.

A9 Gegeben ist ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl reeller und die Anzahl komplexer Nullstellen an.

A10 **Zusatz:** Beweisen Sie Bem. 2.27 3) :

Ist z nichtreelle Nullstelle des reellen Polynoms $P(z)$, so ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle.
bzw.
Nullstellen treten in Polynomen mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

Zeigen Sie zu diesem Zweck zunächst: $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$ und somit, dass $a_n(\overline{z})^n = \overline{(a_n z^n)}$.
Was folgt daraus für $P(\overline{z})$? $(P(z) = ?!)$