Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. Kurzlösung)

6. Woche – Polynome: Horner - Schema, Interpolation, Exponential-Funktionen

Funktionen: explizit, implizit

A1 In der LV Grundlagen der Elektrotechnik wird in einem Erklärvideo eine **explizite** Funktion ges.: $u_a = f(u_q)$ gesucht und als Ergebnis $u_a = \begin{cases} u_q & \text{für } 0 \leq u_a < u_{z0} \\ u_q \cdot \frac{r_z}{R_v + r_z} + u_{z0} \cdot \frac{R_v}{R_v + r_z} & \text{für } u_a \geq u_{z0} \end{cases}$ angegeben. Was ist an dieser Darstellung problematisch?

Kurzlösung: Es wird (durch die Fallunterscheidung) praktisch u_a als Funktion von u_a angegeben. Das ist **keine explizite** Darstellung!

Polynome: Horner - Schema

A2 Machen Sie sich klar, dass mit dem Horner-Schema tatsächlich der Funktionswert eines Polynoms an der Stelle x_0 berechnet wird, vgl. VL Bsp. 3.8.

A3 Führen Sie die Polynomdivision aus VL Bsp. 3.21 mittels zweier Polynomdivisionen durch einen Linearfaktor (einmal durch $(x-1)$ und dann durch $(x+2)$) mit Horner-Schema aus.

Z A4 Machen Sie sich klar, warum das Berechnen eines Funktionswertes eines Polynoms an der Stelle x_0 mit dem Horner-Schema genau die Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x-x_0)$ realisiert, indem Sie

(a) den Zusammenhang zwischen den Polymonkoeffizienten $a_i,\ i = 0, \ldots n$ und den Koeffizienten des 'Ergebnispolynoms' $b_i,\ i = 1, \ldots n$ aus dem Horner-Schema ablesen: $b_i = \ldots$

(b) sowie aus der Gleichung in VL Bem. 3.11

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x) + b_0 \quad \text{mit } P_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + \ldots b_2 x + b_1$$

durch **Vergleich der Koeffizienten** vor x^i der linken und rechten Seite einen Zusammenhang zwischen a_i (Koeffizienten von $P_n(x)$)und b_i (Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$) feststellen: $a_i = \ldots$

(c) sich überzeugen, dass die Ergebnisse von (a) und (b) zueinander equivalent sind.

Beispiel:

	2	4	-4	-8	2	4		
$x_0 = 1$		2	6	2	-6	-4		
	2	6	2	-6	-4	$\boxed{0}$	$= P_5(1)$	$\Rightarrow P_5(x) = (x-1)(2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 6x - 4)$
allgemein	a_n	$\ldots$	$\ldots$	a_i	$\ldots$	a_0		
x_0		$x_0 b_n$	$\ldots$	$x_0 b_{i+1}$	$\ldots$	$x_0 b_1$		
	b_n	$\ldots$	b_{i+1}	b_i	b_1	$\boxed{0}$	$= P_n(x_0)$	$\Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \ldots + b_1)$
bzw.	a_n	$\ldots$	$\ldots$	a_i	$\ldots$	a_0		
x_0		$x_0 b_n$	$\ldots$	$x_0 b_{i+1}$	$\ldots$	$x_0 b_1$		
	b_n	$\ldots$	b_{i+1}	b_i	b_1	b_0	$= P_n(x_0)$	$\Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \ldots + b_1) + b_0$

Polynom-Interpolation

Z A5 Ist $P(x) = x^2 - 2$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -2 & -1 & 2 \end{array}$?

Kurvendiskussion

Z A6 Skizzieren Sie eine gebrochen rationale Funktion mit mindestens einer Nullstelle, Polstelle und Lücke sowie deren Asymptote. Lesen Sie danach die analytische Beschreibung, $f(x) = \ldots$ aus dem Graphen ab.

Exponential-Funktionen

A7 Sind Ihnen die folgenden Potenzgesetze klar

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^2 = a^{2x} \text{ bzw. } (a^x)^n = a^{nx} \text{ sowie } a^{1/2} = \sqrt{a}\ ?$$

Illustrieren Sie sich die Gesetze mit kleinen Beispielen, z.B. $2^{3+4} = \ldots$