 inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

8. Woche – Konvergenzkriterien von Reihen, Stetigkeit von Funktionen

Partialbruchzerlegung

Z A1 Geben Sie die Partialbruchzerlegung folgender Funktion an:

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}$$

Lösung: Z.B. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.

Logarithmus-Funktion

A2 Geben Sie die Logarithmen in der Tabelle an.

	$\log_{10}(10)$	$\log_{10}(1)$	$\log_{10}(100)$	$\log_{100}(10)$	$\log_{10}(0.1)$	$\log_{10}(\sqrt{1000})$
=						
=	$\log_2(?)$	$\log_2(?)$	$\log_2(?)$	$\log_?(2)$	$\log_2(?)$	$\log_2(?)$

Wählen Sie nun die Werte für die '?' in der dritten Zeile so, dass die Logarithmen die gleichen Werte (wie die aus Zeile 1 der Tabelle) annehmen.

Lösung:

	$\log_{10}(10)$	$\log_{10}(1)$	$\log_{10}(100)$	$\log_{100}(10)$	$\log_{10}(0.1)$	$\log_{10}(\sqrt{1000})$
=	1	0	2	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
=	$\log_2(2)$	$\log_2(1)$	$\log_2(4)$	$\log_4(2)$	$\log_2(\frac{1}{2})$	$\log_2(\sqrt{8})$

A3 Verinnerlichen Sie die (z.B. in der Informationstheorie) immer wieder gebrauchten Logarithmusgesetze, s. Bem 3.29:

$$\forall x, y, a > 0\colon\ \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

sowie die Folgerung

$$\log_a(x^2) = 2\log_a(x) \text{ bzw. } \log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

mittels kleiner Beispiele, z.B. $\log_2(2^3 \cdot 2^4) = \ldots$

A4 Warum gilt

$$\log(1+2+3) = \log(1) + \log(2) + \log(3) \quad ?\,:)$$

Gilt auch

$$\log(1+2+3+4) = \log(1) + \log(2) + \log(3) + \log(4) \quad ?\,:)$$

Lösung: Die erste Gleichung gilt, weil $\log(1) = 0$ und $2 \cdot 3 = 6$ gilt. Die zweite Gleichung gilt natürlich nicht.

Konvergenzkriterien von Reihen

A5 Machen Sie sich klar, welche der Konvergenzkriterien für Reihen zum Nachweis von Konvergenz, von Divergenz oder zum Nachweis von Beidem geeignet sind.

Lösung:

Kriterium	Konvergenz	Divergenz
Cauchy-Kriterium	+	+
notwendiges Kriterium	-	+
Leibniz-Kriterium	+	-
Majorantenkriterium	+	-
Minorantenkriterium	-	+
Quotientenkriterium	+	+
Wurzelkriterium	+	+