Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

9. Woche – Ableitungsregeln

Stetigkeit von Funktionen

Z A1 In Def 3.49 ist eine Funktion f als im Punkt x_0 **stetig** definiert, wenn für sie folgende Aussage, a, wahr ist:

$$a = \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D_f\colon (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Geben Sie die Negation (quasi eine Definition für 'in x_0 **unstetig**') an!

Lösung:

$$\bar{a} = \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in D_f\colon \overline{(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

Mit $a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$ und der de Morganschen Regel $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ und mit $\overline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} = |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ folgt:

$$\bar{a} = \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\colon (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Veranschaulichung: Eine Funktion mit Sprung in x_0 und $\varepsilon =$ 'halbe Sprunghöhe'.

A2 Welche (in ihrem Definitionsbereich) stetigen Funktionen kennen Sie?
Kennen Sie überhaupt irgendwelche unstetigen Funktionen?

Lösung: Alle elementaren Funktionen und deren Verkettung sind im Definitionsbereich stetig, s. Kap 3.7. Insbesondere sind Polynome und rationale Funktionen (bis auf die Polstellen - die gehören nicht zum Definitionsbereich) stetig.
Das Paradebeispiel für eine unstetige Funktion ist die Heaviside- bzw. Sprungfunktion

$$s(t) = \underline{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Sie ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Ableitungsregeln

A3 Bestimmen Sie mit Hilfe der Quotientenregel, Regel 3 in Kap. 4.1, die Ableitung von $y = \tan x$.

Lösung: $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

A4 Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel 5 in Kap. 4.1 die Ableitung von $f = \arctan x$.

Lösung: Regel 5 $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ mit $f(x) = \tan(x)$ und folglich $f^{-1}(x) = \arctan x$ und $f' = 1 + \tan^2 x$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Grenzwerte

Z A5 (a) Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}.$$

(b) Denken Sie sich eine gebrochen rationale Funktion $f(x)$ aus, so dass gilt:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \infty \quad \text{und gleichzeitig} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Lösung:

(a)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2} = 3, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2} = \infty.$$

(b) Z.B. $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$