Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

IWR

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

10. Woche – Nullstellensuche, Taylor-/Potenz-Reihen

Nullstellensuche: Bisektion und Newton-Verfahren

Z A1 Zeichnen Sie eine im Intervall $[a, b]$ stetige, konvexe Funktion f mit $f' > 0$ und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Angenommen Sie suchen die laut Zwischenwertsatz Satz 3.55 existente Nullstelle, x_0, iterativ (Start bei $x_0 = b$). Skizzieren Sie die Iterationen der numerischen Nullstellensuche mit

(a) Bisektion (Intervallhalbierung), s. Bem. 3.57

(b) Newton-Verfahren Kap. 4.5.

A2 (a) Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ an. (Das ergibt die Iterationsvorschrift des in der VL erwähnten Heron-Verfahrens zum Wurzelziehen.)

(b) Führen Sie mit den Startwert $x_0 = 1$ die ersten 3 Iterationen durch.

Taylorentwicklung und Potenzreihe

A3 Stimmt folgendes?: Der Mittelwertsatz (Satz 4.12) gibt (nach $f(b) - f(a)$ umgestellt) das Restglied R_0 der Taylor-Entwicklung (Satz 4.21) der Funktion f um den Entwicklungspunkt a (ausgewertet an der Stelle b) an.

A4 Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)

Z a) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

b) $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ist.

A5 Was ist der Unterschied zwischen einer Taylor-Reihe und einer Potenzreihe?

A6 Schreiben Sie die ersten 8 Summanden der Reihe für die komplexe Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (s. Def. 4.39) für $z = ix$ auf und vergleichen Sie diese mit den jeweils ersten 4 Summanden der Taylor-Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (s. auch F04_4).

Wiederholung Geradengleichung

A7 Welcher der drei Darstellungsformen einer Geradengleichung entspricht:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \; ?$$