

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 10. Woche – Nullstellensuche, Taylor-/Potenz-Reihen

Nullstellensuche: Bisektion und Newton-Verfahren

Z A1 Zeichnen Sie eine im Intervall $[a, b]$ stetige, konvexe Funktion f mit $f' > 0$ und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Angenommen Sie suchen die laut Zwischenwertsatz [Satz 3.55](#) existente Nullstelle, x_0 , iterativ (Start bei $x_0 = b$). Skizzieren Sie die Iterationen der numerischen Nullstellensuche mit

- (a) Bisektion (Intervallhalbierung), s. [Bem. 3.57](#)
- (b) Newton-Verfahren [Kap. 4.5](#).

A2 (a) Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ an. (Das ergibt die Iterationsvorschrift des in der VL erwähnten Heron-Verfahrens zum Wurzelziehen.)

- (b) Führen Sie mit den Startwert $x_0 = 1$ die ersten 3 Iterationen durch.

Taylorentwicklung und Potenzreihe

A3 Stimmt folgendes?: Der Mittelwertsatz ([Satz 4.12](#)) gibt (nach $f(b) - f(a)$ umgestellt) das Restglied R_0 der Taylor-Entwicklung ([Satz 4.24](#)) der Funktion f um den Entwicklungspunkt a (ausgewertet an der Stelle b) an.

A4 Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)

- Z a)** $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$,
b) $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ist.

A5 Was ist der Unterschied zwischen einer Taylor-Reihe und einer Potenzreihe?

A6 Schreiben Sie die ersten 8 Summanden der Reihe für die komplexe Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (s. [Def. 4.42](#)) für $z = ix$ auf und vergleichen Sie diese mit den jeweils ersten 4 Summanden der Taylor-Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (s. auch [F04.4](#)).

Wiederholung Grenzwerte, Geradengleichung

Z A7 (a) Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}.$$

(b) Denken Sie sich eine gebrochen rationale Funktion $f(x)$ aus, so dass gilt:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \quad \text{und gleichzeitig} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

A8 Welcher der [drei Darstellungsformen einer Geradengleichung](#) entspricht:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) ?$$