Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

10. Woche – Nullstellensuche, Taylor-/Potenz-Reihen

Nullstellensuche: Bisektion und Newton-Verfahren

Z A1 Zeichnen Sie eine im Intervall $[a, b]$ stetige, konvexe Funktion f mit $f' > 0$ und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Angenommen Sie suchen die laut Zwischenwertsatz Satz 3.55 existente Nullstelle, x_0, iterativ (Start bei $x_0 = b$). Skizzieren Sie die Iterationen der numerischen Nullstellensuche mit

(a) Bisektion (Intervallhalbierung), s. Bem. 3.57

(b) Newton-Verfahren Kap. 4.5.

A2 (a) Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ an. (Das ergibt die Iterationsvorschrift des in der VL erwähnten Heron-Verfahrens zum Wurzelziehen.)

(b) Führen Sie mit den Startwert $x_0 = 1$ die ersten 3 Iterationen durch.

Lösung:

(a)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

(b)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\ X_2 &= \frac{17}{12} \approx 1.4167 \\ X_3 &= \frac{577}{408} \approx 1.4142157 \\ \sqrt{2} &\approx 1.4142136 \end{aligned}$$

Taylorentwicklung und Potenzreihe

A3 Stimmt folgendes?: Der Mittelwertsatz (Satz 4.12) gibt (nach $f(b) - f(a)$ umgestellt) das Restglied R_0 der Taylor-Entwicklung (Satz 4.24) der Funktion f um den Entwicklungspunkt a (ausgewertet an der Stelle b) an.

Lösung: Ja! :-)

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - T_0(x) \\ &= f(x) - f(x_0) = f'(s)(x - x_0) \qquad \text{mit } x := b, x_0 := a, s := x_0 \\ &= f(b) - f(a) \ \ = f'(x_0)(b - a) \end{aligned}$$

A4 Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0)$

Z a) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

b) $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ist.

Lösung:

(a) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$:-)

(b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$:-)

A5 Was ist der Unterschied zwischen einer Taylor-Reihe und einer Potenzreihe?

Lösung: Gar keiner! ;-) Jede Taylor-Reihe ist eine Potenzreihe (und umgekehrt).

A6 Schreiben Sie die ersten 8 Summanden der Reihe für die komplexe Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (s. Def. 4.42) für $z = ix$ auf und vergleichen Sie diese mit den jeweils ersten 4 Summanden der Taylor-Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (s. auch F04_4).

Lösung: Potenzreihe f"ur $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit $z = ix$: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ usw.

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1\underline{+ix} - \frac{x^2}{2!}\underline{-i\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!}\underline{+i\frac{x^5}{5!}} - \frac{x^6}{6!}\underline{-i\frac{x^7}{7!}} + \frac{x^8}{8!} \pm \dots \\
&= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + 0 + \frac{x^8}{8!} \pm \dots \\
&+ i(0\underline{+x} + 0\underline{-\frac{x^3}{3!}} + 0\underline{+\frac{x^5}{5!}} + 0\underline{-\frac{x^7}{7!}} + 0 \pm) \dots \\
&= \cos(x) + i\sin(x)
\end{aligned}$$

Wiederholung Grenzwerte, Geradengleichung

Z A7 (a) Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x + 3x^2}.$$

(b) Denken Sie sich eine gebrochen rationale Funktion $f(x)$ aus, so dass gilt:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \infty \quad \text{und gleichzeitig} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Lösung:

(a)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{3x+2x^2+x^3}{x+3x^2} = 3, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2x^2+x^3}{x+3x^2} = \infty.$$

(b) Z.B. $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$

A8 Welcher der drei Darstellungsformen einer Geradengleichung entspricht:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \; ?$$

Lösung: Punkt-Richtungs-Form - der Name ist nicht besonders sinnvoll, die Form schon.