Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

11. Woche – vorausschauendes Denken beim Integrieren

A1 Ableitung/Stammfunktion von Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind beim Integrieren/Differenzieren unkritisch (gehen auch wieder in Potenzfunktionen über). Machen Sie sich die einzige Ausnahme klar: welche Potenzfunktion führt beim Integrieren aus den Potenzfunktionen heraus?

Angenommen Sie integrieren über ein Produkt aus einer Potenzfunktion und $\ln(x)$. Durch welche Wahl ($\ln(x) = u$ oder $\ln(x) = v'$) werden Sie bei der partiellen Integration $\ln(x)$ geschickt los?

Lösung: $\ln(x) = u \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

A2 Überblick Funktionen und ihre Ableitungen

Sie lernen, dass man sich durch part. Integration vor einem 'unangenehmen' Produkt von Funktionen drücken kann, in dem man statt dessen das Integral über ein 'angenehmeres' Produkt von Funktionen berechnet.

Bei der Integration durch Substitution handelt man sich die Ableitung der Substitutionsvariable als Faktor im Integranden ein.

In beiden Fällen ist es nützlich, sozusagen vorausschauend im Kopf zu haben, wie die Ableitungen prinzipiell aussehen ($\frac{1}{x^2+\ldots}$ oder $\frac{1}{\sqrt{x^2+\ldots}}$). Verschaffen Sie sich durch Blick auf die Liste der Grund-Integrale und -Ableitungen einen Überblick, welche Funktionen eine Ableitung dieser Form haben.

Z A3 Logithmische Integration = Spezialfall der Substitutionsregel

Für welche äußere Funktion f läuft die Integration durch Substitution auf logarithmische Integration hinaus?

Lösung: Für $f(x) = \dfrac{1}{x}$

A4 Stammfunktionen von Partialbrüchen mit kompl. Polstellen
Vollziehen Sie die Punkte 3) und 4) aus VL 5_3 nach.
Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ (Tabelle nachgucken!)

(b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(x/a)^2}\,\mathrm{d}\,x = \ldots$ (Substitution $t = x/a$!)

(c) $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+q-(p/2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \ldots$ ((b) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der Liste der Grundintegrale Nr. 11.

(d) $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x$ (Augen auf: Zähler ist Ableitung des Nenners)

(e) $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x$ ((d) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der Liste der Grundintegrale Nr. 10.
Und nun konkret:

(f) $I = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$

(g) $I = \int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$

Z (h) $I = \int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (Augen auf: Ist das eine ECHT gebrochen rationale Funktion?)

Lösung:
(f) $I = \ln(|x^2+6x+10|) + C$,
(g) $I = \arctan(x+3) + C$
(h) $I = x - \arctan(x) + C$

Wiederholung Partialbruchzerlegung

A5 Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung zu Beispiel 5.16

$$\frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \ldots$$

Lösung: S. VL5_3-Beispiel 5.16