Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 (inkl. einiger Lösungen)
13. Woche – Vektorraum

A1 Basis - linear unabhängig
Ordnen Sie die Worte 'mindestens', 'höchstens' oder 'genau' folgenden Aussagen zu:
Eine Menge von Vektoren, die

(a) eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist, hat $\qquad\qquad$ n Vektoren.

(b) (im $\mathbb{R}^n$) **linear unabhängig** ist, hat $\qquad\qquad$ n Vektoren.

A2 Geben Sie Dimension und eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 3, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ an. Was ist der Nullvektor?

Z A3 Gegeben sind die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\operatorname{span}(\underline{v}^1)$ des Vektors $\underline{v}^1$.

(b) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\operatorname{span}(\underline{v}^1, \underline{v}^2)$ der Vektoren $\underline{v}^1, \underline{v}^2$.

A4 Die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die Koordinaten α_1, α_2 des Vektors $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis, d.h. gesucht sind α_1, α_2 so, dass $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$ gilt.
Veranschaulichen Sie die Situation konkret für $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ grafisch.

A5 Vollziehen Sie die drei Gleichungen $\underline{e}_{k_{\dots}} = \dots$ in TET2 S. 96 nach.

A6 In VL 6_3 wird der Cosinussatz verwendet um zu beweisen, dass für das Skalarprodukt gilt:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}||\underline{v}| \cos(\sphericalangle \underline{u}, \underline{v}).$$

In Aufgabe Ü3/2.1.23 wird hingegen erwartet, den Kosinussatz mit Hilfe des Skalarprodukts zu beweisen. Das wäre zusammen ein verbotener Ringschluss:
Aus A folgt B und aus B folgt A, damit beißt sich die Katze in den Schwanz und weder A noch B sind bewiesen.

Beweisen Sie den Kosinussatz (OHNE Verwendung des Skalarprodukts ;-)), wie in der VL empfohlen unter Verwendung einer Höhe, z.B.:

$$h^2 = \dots \text{(Pythagoras in einem Teildreieck)} = \dots \text{(Pythagoras im anderen Teildreieck)}$$

A7 Skalarprodukt in TET
Gegeben ist ein Vektor $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$. Für welche Orte $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\underbrace{\langle \underline{k}, \underline{r} \rangle}_{=:\underline{k}\cdot\underline{r}} = \text{const}\,?$$

Z A8 Kreuzprodukt in EMF

Im 2. Semester lernen Sie im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' (EMF) das ebene Magnetfeld (magnetische Feldstärke $\underline{H}$) eines (idealisiert) unendlich langen Stromleiters kennen:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{I}{2\pi \|\underline{r}\|^2} \cdot \underline{e}_L \times \underline{r},$$

wobei $\underline{e}_L$ der Einheitsvektor (oder der auf Länge=1 normierte Vektor) in Richtung des Stromflusses ist und $\underline{r}$ der Vektor vom Leiter zum 'Ort' $\underline{r}$ (der 'Ortsvektor') ist, dessen Feldstärke mit $\underline{H}(\underline{r})$ angegeben wird.

Geben Sie die magnetische Feldstärke für einen Strom $I = 3\text{A}$ 'entlang der z-Achse' an den Orten

$\underline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ m, $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ m und $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ m an.

Zeichnen Sie die Situation für einen Kreis (um den Ursprung) mit Radius 3m in der x-y-Ebene.

A9 [**Zusatz:**] Gegeben ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen (an die Koeffizienten a, b, c) ist diese Abbildung ein (evtl. nicht-euklidisches) Skalarprodukt, s. F6_3?

Wiederholung+Ausblick: Integration

A10 In der Vorlesung Theoretische Elektrotechnik werden Sie folgendes Integral vorfinden, s. TET1 Seite134 wobei $\sigma(.)$ und $P_1(.)$ gegebene Funktionen sind:

$$\int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\cos(\vartheta) \quad \text{wobei } \mathrm{d}\cos(\vartheta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\vartheta}(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\,\vartheta$$

Hier wurde die Substitutionsregel quasi 'halb angewendet'. Notieren Sie das Intregral 'ganz substituiert' (mit $t = \cos(\vartheta)$) bzw. 'nicht substituiert':

$$\int_{t=-1}^{1} \quad \dots \quad \mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\cos(\vartheta) = \int_{\vartheta=\pi}^{0} \quad \dots \quad \mathrm{d}\,\vartheta$$