Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291) **inkl. Lösung**

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

15. Woche – Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Rang

A1 Matrizen: Dimension und Produkt In dieser Aufgabe geht es um Know-How, was Sie im Fach Systemtheorie (3.+4. Semester) benötigen werden.

(a) Sie sehen zwei Gleichungen: eine vektoriell die andere skalar.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + B \cdot x$$
$$y = C \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + D \cdot x \qquad \text{mit } x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die (einzig sinnvollen) Dimensionen der Martizen A, B, C, D an.

(b) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}, \; D = 1$$

Geben Sie die Matrizen $sE - A$ und $(sE - A)^{-1}$ an; dabei ist E die Einheitsmatrix und s eine komplexe Variable (die Sie nicht stört :-)).
Berechnen Sie nun $C(sE - A)^{-1}B + D$.
Hinweis: Vektoren sind auch nur Matrizen und werden genauso multipliziert, s. Bem. 7.13.
Bemerkung: Im Jahrgang 2018 hatten ca. 90% der Studenten in einem Kurztest in Systemtheorie Schwierigkeiten mit den hier benötigten Matrizenoperationen (Matrix · Vektor …). Wir hoffen, dass es Ihnen nicht so gehen wird!

Lösung:

(a) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times 2}, D \in \mathbb{R}$.

(b)
$$sE - A = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \; (sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C(sE - A)^{-1}B + D &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ s+1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{-3\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} + 1 = \frac{s-1}{s+2} \end{aligned}$$

.

Z A2 LGS im $\mathbb{R}^2$

Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 3 & a & b \end{array}\right)$$

Geben Sie entsprechend Satz 7.23 Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, so dass das zugehörige lineare Gleichungssystem

(a) genau eine Lösung hat,

(b) keine Lösung hat bzw.

(c) unendlich viele Lösungen hat.

Veranschaulichen Sie die Situation in (b) und (c) graphisch, indem Sie die durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden $g_1 : 2x + 4y = 1, g_2 : 3x + \dots$ zeichnen.

Lösung:

(a) $a \neq 6$ (b egal),

(b) $a = 6, b \neq 3/2$: beide Geraden parallel,

(c) $a = 6, b = 3/2$: beide Geraden sind identisch.

A3 Rang der transponierten Matrix

Bestimmen Sie den Rang der transponierten Koeffizientenmatrix A^T aus (Beispiel 7.20) durch Überführung in Zeilenstufenform R.

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Rang}(A^T) = \mathrm{Rang}(R) = 2$$

Bemerkung: Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist **immer gleich** der Anzahl linear unabhängiger Spalten - daher das 'oder' in der Rang-Definition (VL 7_4 7.21)

A4 **⇔ oder ⇒ oder ⇐**

Gegeben sind die fünf Aussagen:

(a) 'Die Matrix A ist regulär.'

(b) 'Die Matrix A ist invertierbar.'

(c) '$\det A \neq 0$.'

(d) 'Die Zeilen der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

(e) 'Die Spalten der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

Setzen Sie zwischen diese Aussagen die richtigen Verknüpfungen

Lösung:

$$a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow e$$

A5 **Kindergartenrätsel**

Sie kennen vielleicht schon dieses Rätsel, das Vorschulkinder angeblich schneller lösen können als wir: Rätsel.

Sie können es mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems lösen: Das Vorschulkind zählt nämlich einfach nur gewisse 'Bedeutungen' der Ziffern. Die 1. Zeile $9313 = 1$ liest sich also: 'Bedeutung von 9 + Bedeutung von 3 + Bedeutung von 1 + Bedeutung von 3 = 1'. Sei $\underline{x} = (x_0 \ldots x_9)$ der Vektor der unbekannten Bedeutungen der Ziffern 0 bis 9, dann wird das Problem durch das lineare Gleichungssystem mit folgender erweiterten Koeffizientenmatrix beschrieben:

$$(A\,|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5\\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6\\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

Schönerweise ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b) = 9$.

(a) Geben Sie die Dimension der homogenen Lösung $\underline{x}_h$ an.

(b) Sie können an der Koeffizientenmatrix A die homogene Lösung sehen: welches x_i (die Bedeutung welcher Ziffer) ist durch dieses Gleichungssystem beliebig (nicht bestimmt)?

(c) Sie können die Lösung z.B. mit diesem Matlab-Skript mit Zutat ermitteln oder weiter rätseln ;-)

Lösung:

(a) Die homogene Lösung $\underline{x}_h$ ist $n - \text{Rang}(A|b) = 10 - 9 = 1$-dimensional.

(b) Die 5. Spalte der Koeffizientenmatrix A ist $\underline{0} \Rightarrow x_4$ (die 'Bedeutung' der Ziffer 4, die kam gar nicht vor) ist durch dieses Gleichungssystem nicht bestimmt $\Rightarrow \underline{x}_h = t \cdot \underline{e}^5$.

(c)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	0	0	0	0	0	1	0	2	1

Z A6 **Cramersche Regel** Mitunter (z.B. in ET1) wird die Cramersche Regel, Wiki zur Lösung eines (kleinen) linearen Gleichungssystems verwendet. Dabei wird eine der Unbekannten als Quotient zweiter Determinanten berechnet.

Wir wollen die Cramersche Regel verstehen und betrachten das Beispiel:

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix}\underline{a}, & \underline{b}, & \underline{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\underline{a} + x_2\underline{b} + x_3\underline{c} \stackrel{(*)}{=} \underline{d}, \qquad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$$

(a) Warum ist die Determinante folgender Matrizen gleich Null?

$$\det\begin{pmatrix}\underline{b}, & \underline{b}, & \underline{c}\end{pmatrix} = 0 \text{ und } \det\begin{pmatrix}\underline{c}, & \underline{b}, & \underline{c}\end{pmatrix} = 0$$

(b) Nutzen Sie die Linearität der Determinante

$$\det\begin{pmatrix}\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}, & \dots\end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix}\underline{a}, & \dots\end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix}\underline{b}, & \dots\end{pmatrix}$$

um folgende Determinante durch Verwendung von (*) in die Summe von 3 Determinaten umzuwandeln:

$$\det\begin{pmatrix}\underline{d}, & \underline{b}, & \underline{c}\end{pmatrix} = \dots + \dots + \dots \qquad (**)$$

(c) Stellen Sie (**) unter Verwendung von (a) nach x_1 um.
Das ist die Cramersche Regel zur Berechnung einer Unbekannten (hier x_1) im linearen Gleichungssystem. Zur Berechnung von x_i muss die 'rechte Seite' (hier $\underline{d}$) anstelle der i-ten Spalte in die Koeffizientenmatrix eingesetzt werden.

Lösung:

(a) Der von den Vektoren $\underline{b}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannte Spat hat das Volumen Null bzw. die Vektoren sind linear abhängig ...

(b)

$$\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} = x_1 \det\begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} + x_2 \underbrace{\det\begin{pmatrix}\underline{b} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}_{=0} + x_3 \underbrace{\det\begin{pmatrix}\underline{c} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}_{=0}$$

(c) $x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\underline{d} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix}}{\det A}$

A7 LGS in ET1 Gegeben sind zwei Gleichungen (resultierend aus der Knotenspannungsanalyse einer Schaltung):

$$U_{10}2G - U_{20}G = I_q$$
$$-U_{10}G + U_{20}3G = U_qG - I_q$$

wobei G, I_q, U_q als gegebene Konstanten zu betrachten sind.

(a) Geben Sie die Koeffizienten-Matrix A (der LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$) sowie deren Determinante an.

(b) Bestimmen Sie U_{10} mit Hilfe der Cramerschen Regel, s. A6.

Lösung:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2G & -G \\ -G & 3G \end{pmatrix}$, $\det(A) = 5G^2$,

(b) $U_{10} = \frac{\det(\ldots)}{5G^2} = \frac{2I_q+U_qG}{5G}$.

A8 LGS in TM: in Anlehnung an Aufgabe 1.1.9 Übungsheft Statik

Gegeben:
$\underline{F_1} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\underline{F_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \end{pmatrix}$, $\underline{F_3} = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\underline{F_4} = \begin{pmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{pmatrix} \cdot F_4$, $\underline{F_5} = \begin{pmatrix} -\cos 60° \\ \sin 60° \end{pmatrix} \cdot F_5$ und
$\sum_{i=1}^{5} \underline{F_i} = \underline{0} \quad (*)$.
Gesucht: F_4, F_5.
Bringen Sie (*) in die LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$, wobei $\underline{x}$ der Vektor der Unbekannten ist.
Woran erkennen Sie, dass das LGS eine eindeutige Lösung hat?

Lösung: $A = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\cos 60° \\ \sin 60° & \sin 60° \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \end{pmatrix}$.
$\det(A) \neq 0 \;\Rightarrow$ LGS hat eindeutige Lösung.

A9 Gleichungssystem in Theoretischer Elektrotechnik 1 (TET1)

An Anlehnung an die Lösung der Aufgabe 7.5 (TET1): Gegeben sind zwei Funktionen:

$$\Phi_1 = C_1 \sin(kx) \sinh(ky)$$
$$\Phi_2 = C_2 \sin(kx) \exp(-ky)$$

deren Konstanten C_1, C_2 durch folgende Bedingungen festgelegt werden:

$$\Phi_1\big|_{y=b} = \Phi_2\big|_{y=b} \tag{0.1}$$
$$\varepsilon\frac{c}{2}\left(C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \sinh(ky)\Big|_{y=b} - C_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \exp(-ky)\Big|_{y=b} \right) = Q\sin(ka) \tag{0.2}$$

wobei k, a, b, c, Q als gegebene Konstanten zu betrachten sind.

(a) Klassifizieren Sie das aus 0.1-0.2 resultierende Gleichungssystem (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen)!

(b) Falls es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt: Geben Sie die Koeffizienten-Matrix A (der LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$) sowie deren Determinante an.

Zusatz: Lösen Sie das Gleichungssysten mit Hilfe der Cramerschen Regel, s. A6.

Lösung:

(a) linear, inhomogen.

(b) $A = \begin{pmatrix} \sinh(kb) & -\exp(-kb) \\ \varepsilon\frac{c}{2}k\cosh(kb) & \varepsilon\frac{c}{2}k\exp(-kb) \end{pmatrix}$,

$\det(A) = \varepsilon\frac{c}{2}k\exp(-kb)\det\begin{pmatrix} \sinh(kb) & -1 \\ \cosh(kb) & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon\frac{c}{2}k\exp(-kb)\exp(kb) = \varepsilon\frac{c}{2}k.$

A10 Kern in der Regelungstechnik

Bestimmen Sie den **Kern** der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, s. Bem. 7.26.

Lösung: siehe auch RT2_VL4_F20:

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$