Aufgabe 2

(a) Gegeben sei die Funktion $f : R^2 \to \mathbb{R}$ mit $\quad f(x,y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$.

i) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und die Hesse-Matrix H_f zunächst allgemein und dann im Punkt $(0,0)$. $\boxed{6}$

ii) Wie lauten die Taylorentwicklungen T_1 und T_2 erster bzw. zweiter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $(0,0)$? $\boxed{4}$

(b) Gegeben ist nun die Funktion $g(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(y^2-x^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ist die Funktionen $g(x,y)$ im Ursprung stetig? (Begründung!) $\boxed{4}$

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei die Funktion f mit $\quad f(x,y) = x^2+y^2-18x+22y+2$. Ermitteln Sie die Extremstelle(n), klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, ...) und geben Sie ggf. den Extremwert an. $\boxed{5}$

(b) Der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0, b > 0$ soll ein achsenparalleles Rechteck R, mit den Eckpunkten $\binom{\pm x_R}{\pm y_R}$, **maximaler Fläche** einbeschrieben werden. Gegeben: a, b Gesucht: x_R, y_R.

i) Skizzieren Sie Ellipse und Rechteck. $\boxed{1}$

ii) Geben Sie Zielfunktion f (deren Extremwert gesucht wird) und die Nebenbedingung g an. $\boxed{2}$

iii) Notieren Sie die Lagrange-Funktion. $\boxed{2}$

iv) Geben Sie das Gleichungssystem der notwendigen Bedingungen für Extrema an. $\boxed{3}$

Zusatz: Lösen Sie das Gleichungssystem der notwendigen Bedingungen für Extrema und geben Sie die maximale Rechteckfläche an. $\boxed{+4}$

Aufgabe 4

Gegeben seien das Vektorfeld $\underline{F} = \begin{pmatrix} xe^y \\ -ye^x \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie die Kurve γ, die **geradlinig** von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ führt.

(a) Ist das Vektorfeld $\underline{F}$ quellenfrei? (Begründung!) $\boxed{2}$

(b) Ist das Kurvenintegral 2. Art über $\underline{F}$ wegunabhängig? (Begründung!) $\boxed{2}$

(c) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals 2. Art $I_\gamma = \int_\gamma \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{s}$. $\boxed{6}$

Aufgabe 5

Gegeben ist ein Körper $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^3$, der durch den Zylinder

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ aus der Kugel } x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

herausgeschnitten wird (praktisch ein Bohrkern). Geben Sie die Ansätze zur Berechnung des Volumens des Körpers in kartesischen **und** in Zylinder-Koordinaten an: $\boxed{7}$

$$V = \int_?^? \int_?^? \int_?^? \ldots \mathrm{d}?\,\mathrm{d}?\,\mathrm{d}?$$

Aufgabe 6

Gegeben ist die Ebene, E

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$$

Bestimmen Sie mit Methoden der Integralrechnung den Flächeninhalt des Flächenstückes A, das von dem Zylinder $Z\colon x^2 + y^2 = R^2$ aus der Ebene E herausgeschnitten wird?
(Hinweis: Verwenden Sie die Zylinder-Koordinaten.) $\boxed{12}$