

Selbsteinschätzung Mathe 2

Die Symbole 3 Kreise    mit Ampelfarben dienen der Selbsteinschätzung. Kreuzen Sie an:

-  Ich kann die Frage vollständig beantworten und bin mir sicher, dass meine Antwort richtig ist.
-  Ich kann die Frage nur teilweise beantworten und bin mir nicht so sicher.
-  Ich kann die Frage nicht beantworten bzw. ich bin mir sehr unsicher, wie die richtige Antwort lautet.

1 Eigenwerte, Eigenvektoren & positive Definitheit

1. Wissen Sie, was Eigenwert & Eigenvektor einer Matrix bedeuten und von welchen Matrizen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen können?



2. Wie lautet die **Eigenwertgleichung** und was ist das **charakteristische Polynom**?



3. Was ist die Besonderheit der Eigenwerte & Eigenvektoren von **symmetrischen Matrizen**?



4. Was ist eine Basis, eine **orthogonale** Basis und eine **orthonormale** Basis?
Was ist eine **orthogonale** Matrix und warum sollte sie lieber **orthonormal** heißen?



5. Was ist eine quadratische Form, ihre Normalform und wann ist diese **positiv (semi-)definit**?



2 Kegelschnitte & Hauptachsentransformation

1. Warum heißen Kegelschnitte Kegelschnitte ;-) und welche Kegelschnitte kennen Sie?
Können Sie die Gleichungen von 3 verschiedenartigen Kegelschnitten angeben?



2. Was sind die **Hauptachsen** eines Kegelschnitts?



3. Können Sie die Gleichung einer Ellipse angeben, deren Hauptachsen mit der x- und y-Achse übereinstimmen und die Längen 2 und 3 haben?



4. Können Sie die Gleichung $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 24$ in eine quadratische Form $\underline{x}^T A \underline{x} = 24$ mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ umschreiben?



5. Stimmt folgende Aussage: Die Niveaufäche einer quadratischen Form $\underline{x}^T A \underline{x} = k > 0$ mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ ist eine Ellipse, wenn A nur positive Eigenwerte hat.



Teil I

Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

3 Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Verstehen Sie was eine Vektornorm ist und können mindestens zwei Vektornormen nennen?



2. Können Sie sich die durch $x^2 + y^2 = z^2$ beschriebene Fläche vorstellen oder diese skizzieren?



3. Was sind Niveaulinien (Schnittlinien) in Skalarfeldern?



4. Wie bestimmen Sie einen Grenzwert wie z.B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$?



5. Können Sie überprüfen, ob eine Funktion wie z.B. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig ist



6. Wissen Sie, wie man eine partielle Ableitung erster Ordnung bestimmt?



7. Können Sie partielle Ableitungen beliebiger Ordnung bestimmen?



8. Wissen Sie wann und wie Sie den Satz von Schwarz anwenden können?



9. Wie bestimmen Sie die Tangentialebene an einer Funktion $z = f(x, y)$ im Entwicklungspunkt $P(x_0; y_0)$? Z.B. $z = \arctan(\frac{y}{x})$, $P(1; 1)$



10. Können Sie die Jacobimatrix

$$J_f = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}$$

für $(x, y)^T = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi))^T$ bestimmen?



Teil II

Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variablen – Vektoranalysis

4 Bereichsintegrale in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

1. Wie gehen Sie vor, wenn Sie ein Bereichsintegral

$$\int \int_B f(x, y) dB$$

bestimmen sollen?



2. Können Sie aus der Beschreibung eines Bereichs bzw. Körpers (z.B. Körper begrenzt durch Ebenen $x=1$, $y=1$, $x+y=1$, $z=0$ und $z=xy$) ein Integral zur Berechnung dessen Fläche bzw. Volumens aufstellen?



5 Vektoranalysis

1. Wissen Sie, was grad/div/rot bedeuten und auf welche Argumente sie jeweils anwendbar sind?



2. Können Sie den Gradienten eines Skalarfeldes berechnen?



3. Können Sie bei gegebenen Niveaulinien eines Skalarfeldes φ (in etwa) den Gradienten des Feldes $\text{grad } \varphi$ einzeichnen?



4. Können Sie die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes berechnen?



5. Wie entscheiden Sie, ob ein Vektorfeld wirbelfrei bzw. quellenfrei ist?



6 Kurvenintegrale 1. und 2. Art - skalar und vektoriell

1. Wie gehen Sie beim Lösen von Kurvenintegralen 1. Art vor?



2. Können Sie die Bogenlänge einer Kurve in kartesischen sowie Polar-Koordinaten berechnen?



3. Nennen Sie zwei Beispiele: welche physikalische Bedeutung können vektorielle Kurvenintegrale haben?



4. Wie gehen Sie bei der Lösung eines Kurvenintegrals 2. Art vor? Beispiel:

$$\int_{(-1;0;0)}^{(1;1;-1)} [(x+y+z)dx + (-y+z)dz]$$
 längst eines in $(0;0;0)$ gebrochenen Streckenzuges



5. Was ist das Besondere bei einem Kurvenintegral (2. Art) über ein Gradientenfeld und wie erkennen Sie ein Gradientenfeld?



6. Was muss für das Vektorfeld gelten, damit das Kurvenintegral (2. Art) über dieses Vektorfeld wegunabhängig ist?



7 Oberflächenintegrale 1. und 2. Art- skalar und vektoriell

1. Können Sie für ein Oberflächenintegral 1. Art das Flächenelement bestimmen?



2. Eine gekrümmte Oberfläche wird durch $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ beschrieben. Was erhalten Sie, wenn Sie ein Oberflächenintegral 1. Art der Funktion $f(u, v) = 1$ über diese Fläche berechnen?



3. Warum ist bei einem Oberflächenintegral 2. Art die Richtung des Flächenelements $d\mathbf{A}$ wichtig?



4. Können Sie ein Oberflächenintegral 2. Art berechnen?



5. Können Sie die Oberfläche eines Zylinders, eines Paraboloids oder einer Kugel parametrisieren (also mit Hilfe zweier Parameter beschreiben)?



6. Welche Bedingung muss eine Fläche erfüllen, damit der Integralsatz von Gauß angewendet werden kann?



Teil III

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen – Basics

1. Was ist eine Differentialgleichung und wie bestimmt sich die Ordnung einer DGL? Welche Ordnung hat folgende DGL?

$$y^{(3)} + 4x^2y^{(2)} - 10\frac{\sin(x)}{x} = 0$$



2. Wann existiert für eine DGL 1. Ordnung mit Anfangswert mindestens eine Lösung? Was muss für eine eindeutige Lösbarkeit gelten?



3. Können Sie für $y' = 1 + y^2$ ein erstes grobes Lösungsverhalten graphisch skizzieren (Richtungsfeld)?



4. Welche DGLs können Sie mittels Trennung der Variablen lösen und wie gehen Sie dabei vor?



5. Wie gehen Sie mit einer Anfangsbedingungen zu einer DGL, z.B. $y(1) = 4$, um?



9 Lineare DGL

1. Woran erkennen Sie eine lineare DGL und ob diese homogen/inhomogen ist?



2. Welche Struktur hat die allgemeine Lösung einer linearen DGL?

$$y_{allg} = \dots + \dots$$



3. Wie lösen Sie eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten?



4. Wie funktioniert 'Variation der Konstanten'?



5. Wie viele linear unabhängige Lösungen hat eine homogene DGL n-ter Ordnung?



6. Mit welchem mathematischen Werkzeug lässt sich die lineare Unabhängigkeit der Lösungen einer homogenen linearen DGL n-ter Ordnung prüfen? Wie geht man dabei vor?



7. Sie kennen eine Lösung einer homogenen linearen DGL höherer Ordnung. Erläutern Sie eine Methode zum Auffinden weiterer Lösungen.



10 Nichtlineare DGL: Bernoulli-DGL und exakte DGL

1. Was versteht man unter einer Bernoulli-DGL? Können Sie 1-2 physikalische Probleme nennen, die durch eine Bernoulli-DGL modelliert werden?



2. Wie löst man eine Bernoulli-DGL?



3. Woran erkennen Sie eine exakte DGL?



4. Wie löst man eine exakte DGL?



5. Wie kann eine nicht-exakte DGL in eine exakte DGL überführt werden?



11 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

1. Welchen Ansatz wählen Sie zur Bestimmung der homogenen Lösung einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten? (**geht immer!**)



2. Was ist die charakteristische Gleichung einer linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten?



3. Wie gehen Sie vor, wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Nullstellen und/oder komplexe Nullstellen hat?



4. Für welche Störfunktionen ('rechte Seite der inhomogenen DGL') können Sie für die partikuläre Lösung einen 'Ansatz nach Art der rechten Seite' wählen?



5. Was müssen Sie bei dem 'Ansatz nach Art der rechten Seite' im Zusammenhang mit der charakteristischen Gleichung beachten?



6. Die Störfunktion einer DGL lautet $r(x) = xe^{3x} \sin(4x)$. Wie lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung (ohne Resonanz)? Wie ändert sich der Ansatz mit Resonanz?



12 Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

1. Welche Gemeinsamkeiten bestehen zwischen dem Lösen von linearen DGL und DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten? Wie lautet in dem Zusammenhang der Ansatz für das homogene DGL-System?

2. Sind Sie fit in der Matrizenrechnung (Berechnung von Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Produkten, Determinante, Inverse einer 2x2-Matrix etc.)?

3. Sind Sie mit den einzelnen Schritten des Lösungsverfahrens mittels Eigenwert/Eigenvektor-Paaren vertraut?

4. Wie lautet die homogene Lösung, falls beim Eigenwert/Eigenvektor-Verfahren komplexe Eigenwerte auftreten?

5. Beherrschen Sie den Putzer-Algorithmus? Wann kann es sinnvoll sein, diesen anstelle des EW/EV-Verfahrens anzuwenden?

6. Inwiefern unterscheiden sich die Ansätze 'Variation der Konstanten' und 'Ansatz nach Art der rechten Seite' bei DGL-Systemen von dem Fall einer einzelnen DGL?

7. Können Sie einen Ansatz für die partikuläre Lösung $\mathbf{x}(t)$ hinschreiben, falls das lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten die Inhomogenität $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \exp(t) \end{pmatrix}$ hat und keine Resonanz vorliegt?


13 Potenzreihenansatz

8. Für welche Arten von DGL würden Sie einen Potenzreihenansatz wählen?

9. Kennen Sie die Abfolge der einzelnen Schritte bei diesem Ansatz?



10. Angenommen, Sie haben den Potenzreihenansatz für die gesuchte Größe ($y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$) in die DGL eingesetzt. Warum ist es sinnvoll, eine Substitution $l = k \pm \dots$ der Indizes k für jede einzelne Reihe vorzunehmen?

