

## Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

### 1. Woche – Eigenwerte / Eigenvektoren / Kegelschnitt

#### A1 Weltformel für diagonalisierbare Matrizen: $A = S\Lambda S^{-1}$ ( $\Lambda := D$ aus 7.53)

Betrachtet wird die lineare Abbildung  $\underline{y} = A\underline{x}$ . Gegeben sind die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$  sowie die zugehörigen Eigenvektoren  $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  der Matrix  $A$ . Bitte alles Folgende auch skizzieren!

(a) Geben Sie das Bild  $\underline{y} = A\underline{v}^1$  des Vektors  $\underline{v}^1$  an.

(b) Geben Sie das Bild  $\underline{y} = A\underline{x}$  des Vektors  $\underline{x} = 1 \cdot \underline{v}^1 + 3 \cdot \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  an.

(c) Geben Sie die Matrix  $A$  an.

#### Z A2 LGS - EW/EV - für fortgeschrittene Studenten

Schreiben Sie die Gleichung  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$  (\*) als lineares Gleichungssystem in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (**) \quad (\text{s. Bem. 7.13})$$

Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt = 0 ?), dass (\*) und damit auch (\*\*) die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (***)$$

hat. Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (\*\*\*) über den Rang der Koeffizientenmatrix  $M$  (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?

Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (\*\*\*) über mindestens einen Eigenwert von  $M$ ? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!

### Z A3 Kegelschnitt Hyperbel

Der Graph der Funktion  $y = \frac{1}{x}$  (1) wird Hyperbel genannt.

Bei Kegelschnitten wird jedoch bei  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (2) von einer Hyperbel gesprochen.

Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

- Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!
- Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für  $x'$  und  $y'$  ein.
- Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix  $S$  als Spalten eingetragen:  
 $\underline{x}_{\text{alt}} = S \cdot \underline{x}_{\text{neu}}$  (3) (analog  $\underline{x} = S\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = S^T\underline{x}$ , wenn  $S$  orthogonal, vgl. 7.57 (bzw. 7.61  $\underline{y} = Q^T\underline{x}$  oder 7.63  $\underline{y} = A\underline{x} \dots$ )).
- Es gilt  $\underline{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $\underline{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Geben Sie mit Hilfe von (3)  $x$  und  $y$  als Funktion von  $x'$  und  $y'$  an.
- Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ . Geben Sie  $a$  und  $b$  an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

### A4 Kegelschnitt grafisch

Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:

$x^2 - y^2 = 1$ ,  $y^2 - x^2 = 1$ ,  $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$ ,  $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$ ,  $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$  (Asymptote mit zeichnen)

### A5 Orthogonale Matrix

Geben Sie für die Matrix  $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  die Inverse  $Q^{-1}$ , ihre Transponierte  $Q^T$  sowie  $Q^T \cdot Q$  an. Ist  $Q$  eine orthogonale Matrix, d.h. bilden ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis (ONB) ?

### A6 Kompl. EW - Drehung

Betrachtet wird die Abbildung  $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$  mit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Geben Sie das Bild des Einheitsvektors  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).
- Berechnen Sie nun die Eigenwerte der Matrix  $A$ .
- Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).
- Schreiben Sie  $A$  als Element von  $C = \{aE + bI : a, b \in \mathbb{R}\}$  s. Bsp. 7.12.  
Wie hängen  $a$  und  $b$  mit den Eigenwerten zusammen und wie lautet die zu  $A$  gehörige komplexe Zahl  $z$ ?
- Modifizieren Sie  $A$  so, dass durch die Abbildung  $\underline{y} = A_{\text{neu}} \cdot \underline{x}$  nur eine Drehung (und keine Streckung) realisiert wird (s. ggf. 7.63 oder 7.66).